IB
DIPLOMA

Matemáticas

Ric Pimentel - Terry Wall

Vicens Vives

Contenidos

Las soluciones de los ejercicios de repaso, las soluciones desarrolladas de los ejercicios de las unidades y las autoevaluaciones están en la página web **www.vicensvives.com/ibextras** o **www.hodderplus.co.uk/IBMSSL2**

Necesitarás usuario y contraseña para acceder a los materiales online, utiliza estos:

Usuario: IBMSSL
Contraseña: exponential

Ten en cuenta que tanto el usuario como la contraseña diferencian entre mayúsculas y minúsculas.

Unidad 1

Números y álgebra

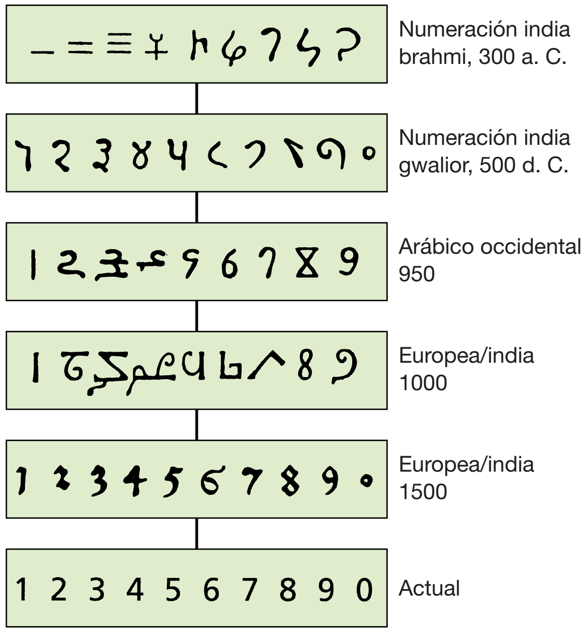
Tabla de contenidos

Introducción

Las primeras escrituras en las que se cita el origen y el desarrollo de la utilización del dinero se encontraron en la ciudad de Eridu, en Mesopotamia (actual Iraq). Estas escrituras estaban hechas en tabletas de arcilla como estas encontradas en Uruk.

Hace cinco mil años, los sumerios, como se denominaba a la gente de esta región, utilizaban un sistema de escritura llamado «cuneiforme». Actualmente se cree que estos escritos eran simples cuentas de excedentes de cereales. Puede que esto suene irrelevante hoy en día, pero el paso de sociedad cazadora y recolectora a sociedad ganadera y agricultora nos ha dirigido a este complejo estilo de vida que llevamos ahora.

Nuestro actual sistema de numeración tiene una larga historia que comenzó alrededor del año 300 a. C. con la numeración india brahmi.



Se reconoce a Abu ja'far Muhammad Ibn Musa Al-Khwarizmi como «el padre del álgebra». Nació en Bagdad en el 790 d. C. y escribió el libro *Hisab al-jabr w'al-muqabala* en el 830 d. C. del que proviene la palabra álgebra (*al-jabr*). Sabemos que desarrolló su trabajo en la universidad de Bagdad, que en aquellos momentos era la mayor del mundo.

Se conoce al poeta Omar Khayyam por su largo poema el «*Rubaiyat*», pero, además era un excelente matemático que trabajó en el teorema binomial. Fue él el que introdujo el símbolo «shay» que se convirtió en nuestra actual *x*.

1.1 Conjuntos de números

Los números naturales

Un niño aprende a contar: «uno, dos, tres, cuatro, ...». Estos números enteros son los que se usan para contar.

Un niño dice «Tengo tres años», o «Vivo en el portal 73».

Si incluimos el 0, entonces tendremos el conjunto de números al que llamamos **números naturales**. El conjunto de los números naturales es $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Los números enteros

Pongamos que, un día frío, la temperatura es de 4 °C a las 22 h. Si la temperatura desciende 6 °C más, entonces llegará a tener un valor «bajo cero», que sería de –2 °C.

Si tienes un descubierto en el banco de 200 £, se puede escribir como –200 £.

El conjunto de los **números enteros** es $\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$.

Por lo tanto, $\mathbb{Z}$ es una extensión de $\mathbb{N}$, y los números naturales son también enteros.

Los números racionales

Una niña puede decir «Tengo 3 años», pero también podría decir «Tengo tres años y medio», incluso «tres años y cuarto». Los números $3\frac{1}{2}$ y $3\frac{1}{4}$ son **números racionales**. Todos los números racionales se pueden escribir como una fracción de denominador distinto de cero. Todos los números con un número exacto de decimales y los periódicos son números racionales, puesto que también se pueden escribir como una fracción, por ejemplo:

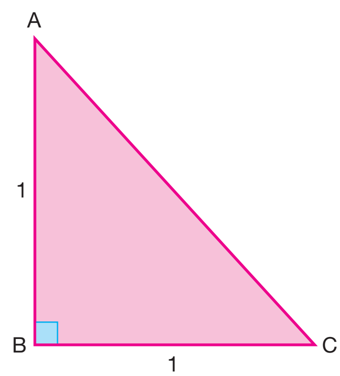
$0{,}2 = \frac{1}{5}$ $\quad 0{,}3 = \frac{3}{10}$ $\quad 7 = \frac{7}{1}$ $\quad 1{,}53 = \frac{153}{100}$ $\quad 0{,}\widehat{2} = \frac{2}{9}$

El conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$, es una extensión del conjunto de los números enteros.

Los números reales

Los números que no se pueden expresar como una fracción no son números racionales; son **números irracionales**.

Por ejemplo, si usamos el teorema de Pitágoras para hallar la hipotenusa, AC, del triángulo de la figura, obtenemos $\sqrt{2}$:



$AC^2 = 1^2 + 1^2$

$AC^2 = 2$

$AC = \sqrt{2}$

$\sqrt{2} = 1{,}414\,213\,56\ldots$ Las cifras decimales son infinitas y no se repiten periódicamente. Es una propiedad de los números irracionales. Otro ejemplo que conoces de número irracional es π (pi) = 3,141 592 654... El conjunto de los números irracionales y racionales juntos forma el conjunto de los **números reales**, $\mathbb{R}$. También existen unos números llamados «números imaginarios», que no son reales, pero todos los números que vas a encontrar en este libro son números reales.

Ejercicio 1.1.1

1 Identifica a qué conjunto de números pertenecen los siguientes.

a 3 **b** –5 **c** $\sqrt{3}$ **d** $11{,}\widehat{3}$

En los ejercicios del 2 al 6, determina y justifica si los números son racionales o irracionales.

2 **a** 1,3 **b** $0{,}\widehat{6}$ **c** $\sqrt{3}$

3 **a** $-2\frac{2}{5}$ **b** $\sqrt{25}$ **c** $\sqrt[3]{8}$

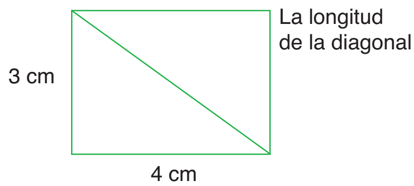
4 **a** $\sqrt{7}$ **b** 0,625 **c** $0,\widehat{1}$

5 **a** $\sqrt{2} \times \sqrt{3}$ **b** $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ **c** $\left(\sqrt{2} \times \sqrt{3}\right)^2$

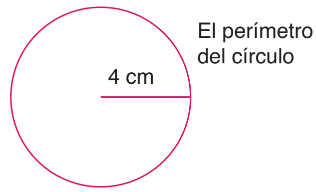
6 **a** $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ **b** $\dfrac{2\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$ **c** $4 + \left(\sqrt{9} - 4\right)$

En los ejercicios del 7 al 10, determina y justifica si el resultado es un número racional o irracional.

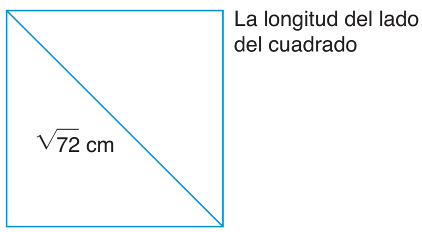
7



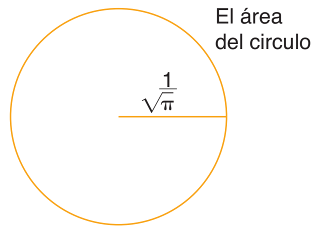
8



9



10



1.2 Aproximaciones

En muchos casos no es necesario que los números sean exactos, o incluso puede ser preferible. En estas ocasiones utilizamos aproximaciones. Existen diferentes tipos de aproximaciones, estas son las más utilizadas.

Redondeo

Podemos decir que 28 617 personas van a una competición de gimnasia deportiva; este mismo número se puede dar con distintos niveles de precisión:

Si lo redondeamos a la decena de millar más próxima tendremos 30 000.

Si lo redondeamos al millar más próximo serán 29 000.

Si lo redondeamos a la centena más próxima serán 28 600.

En este tipo de situaciones no se suele dar el número exacto de personas, sino una aproximación.

■ Ejercicio 1.2.1

1 Redondea los siguientes números al millar más próximo.

a 68 786 **b** 74 245 **c** 89 000

d 4 020 **e** 99 500 **f** 999 999

2 Redondea los siguientes números a la centena más próxima.

a 78 540	**b** 6 858	**c** 14 099
d 8 084	**e** 950	**f** 2 984

3 Redondea los siguientes números a la decena más próxima.

a 485	**b** 692	**c** 8 847
d 83	**e** 4	**f** 997

Cifras decimales

Un número también se puede aproximar con una cantidad de cifras decimales (c.d.). Esto hace referencia a la cantidad de cifras decimales que se escriben después de la coma.

Ejemplos resueltos

1 Escribe el número 7,864 con una cifra decimal.

El número se tiene que escribir con una sola cifra después de la coma. Para ello es necesario tener en cuenta la segunda cifra decimal. Si es 5 o mayor, el número se redondea hacia arriba, en este caso la segunda cifra es 6 por lo tanto, el 8 se redondea a 9, es decir:

7,864 se escribe como 7,9 con una cifra decimal.

2 Escribe el número 5,574 con dos cifras decimales.

El resultado debe tener dos cifras decimales después de la coma. En este caso hay que tener en cuenta la tercera cifra decimal. Como es menor que 5, la segunda cifra se deja como está, es decir:

5,574 se escribe como 5,57 con dos cifras decimales.

Ejercicio 1.2.2

1 Escribe los siguientes números con una cifra decimal.

a 5,58	**b** 0,73	**c** 11,86
d 157,39	**e** 4,04	**f** 15,045
g 2,95	**h** 0,98	**i** 12,049

2 Escribe los siguientes números con dos cifras decimales.

a 6,473	**b** 9,587	**c** 16,476
d 0,088	**e** 0,014	**f** 9,3048
g 99,996	**h** 0,0048	**i** 3,0037

Cifras significativas

Los números pueden aproximarse a un número dado de cifras significativas (c.s.). En el número 43,25, el 4 es la cifra más significativa pues tiene un valor de 40. En cambio, el 5 es la cifra menos significativa, pues su valor es solo de 5 centésimas. Por defecto, cualquier resultado se redondeará a tres cifras significativas, a no ser que se especifique de otra forma.

Ejemplos resueltos

1 Expresa 43,25 con tres cifras significativas.

Solo debes escribir las tres cifras más significativas, pero se ha de tener en cuenta la cuarta para decidir si la tercera se redondea o no. Como la cuarta cifra es 5, la tercera se redondea hacia arriba, es decir:

43,25 se escribe 43,3 con tres cifras significativas.

2 Expresa 0,0043 con una cifra significativa.

En este ejemplo solo hay dos cifras significativas: el 4 y el 3. Como el 4 es la más significativa y se escribirá esta cifra, así:

0,0043 se escribe 0,004 con una cifra significativa.

WEB PERSONAL TUTOR

Ejercicio 1.2.3

1 Expresa los siguientes números con el número de cifras significativas que se indica entre paréntesis.

a 48 599 (1 c.s.)	**b** 48 599 (3 c.s.)	**c** 6 841 (1 c.s.)
d 7 538 (2 c.s.)	**e** 483,7 (1 c.s.)	**f** 2,5728 (3 c.s.)
g 990 (1 c.s.)	**h** 2 045 (2 c.s.)	**i** 14,952 (3 c.s.)

2 Expresa los siguientes números con el número de cifras significativas que se indica entre paréntesis.

a 0,08562 (1 c.s.)	**b** 0,5932 (1 c.s.)	**c** 0,942 (2 c.s.)
d 0,954 (1 c.s.)	**e** 0,954 (2 c.s.)	**f** 0,00305 (1 c.s.)
g 0,00305 (2 c.s.)	**h** 0,00973 (2 c.s.)	**i** 0,00973 (1 c.s.)

3 Escribe con tres cifras significativas las soluciones de las siguientes operaciones.

a $23{,}456 \times 17{,}89$	**b** $0{,}4 \times 12{,}62$	**c** $18 \times 9{,}24$
d $76{,}24 \div 3{,}2$	**e** $7{,}6^2$	**f** $16{,}42^3$
g $\dfrac{2{,}3 \times 3{,}37}{4}$	**h** $\dfrac{8{,}31}{2{,}02}$	**i** $9{,}2 \div 4^2$

Estimación de cálculos

Aunque sea rápido y práctico hacer cálculos con una calculadora, para evitar errores resulta útil hacerse una idea aproximada de cuánto va a ser la solución. La forma de hacer una aproximación rápida es redondear cada uno de los números de la operación a uno cercano, de forma que sea más fácil el cálculo.

Ejemplos resueltos

1 Estima el resultado de 57×246.

Aquí tienes dos opciones:

i) $60 \times 200 = 12\,000$

ii) $50 \times 250 = 12\,500$

2 Estima el resultado de $6\,386 \div 27$.

$6\,000 \div 30 = 200$

Ejercicio 1.2.4

1 Sin usar la calculadora, estima las soluciones de las siguientes operaciones.

a 62×19	**b** 270×12	**c** 55×60
d $4\,950 \times 28$	**e** $0{,}8 \times 0{,}95$	**f** $0{,}184 \times 475$

2 Sin usar la calculadora, estima las soluciones de las siguientes operaciones.

a $3\,946 \div 18$	**b** $8\,287 \div 42$	**c** $906 \div 27$
d $5\,520 \div 13$	**e** $48 \div 0{,}12$	**f** $610 \div 0{,}22$

3 Sin usar la calculadora, estima las soluciones de las siguientes operaciones.

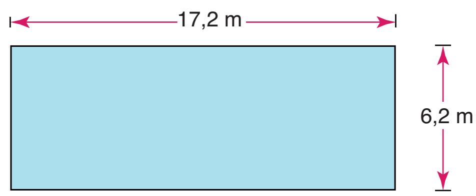
a $78{,}45 + 51{,}02$	**b** $168{,}3 - 87{,}09$	**c** $2{,}93 \div 3{,}14$
d $84{,}2 \div 19{,}5$	**e** $\dfrac{4{,}3 \times 752}{15{,}6}$	**f** $\dfrac{(9{,}8)^3}{(2{,}2)^2}$

4 Haciendo una estimación, identifica cuáles de las siguientes operaciones son incorrectas. Explica qué has hecho en cada caso.

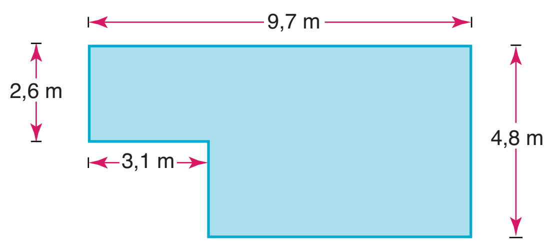
a $95 \times 212 = 20\,140$	**b** $44 \times 17 = 748$
c $689 \times 413 = 28\,457$	**d** $142\,656 \div 8 = 17\,832$
e $77{,}9 \times 22{,}6 = 2\,512{,}54$	**f** $\dfrac{8{,}4 \times 46}{0{,}2} = 19\,366$

5 Haz una estimación de las áreas de las siguientes figuras. No calcules la solución exacta.

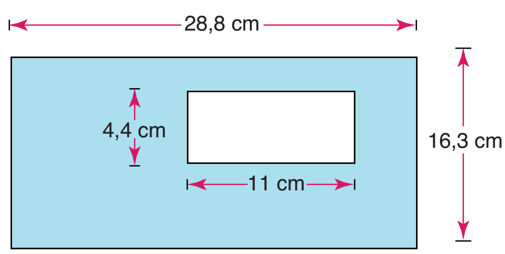
a



b

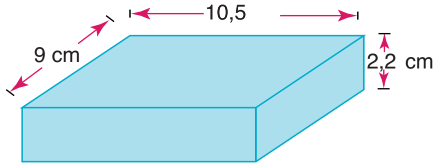


c

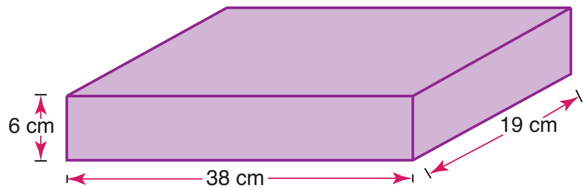


6 Estima cuál es el volumen de cada uno de los siguientes sólidos. No calcules la solución exacta.

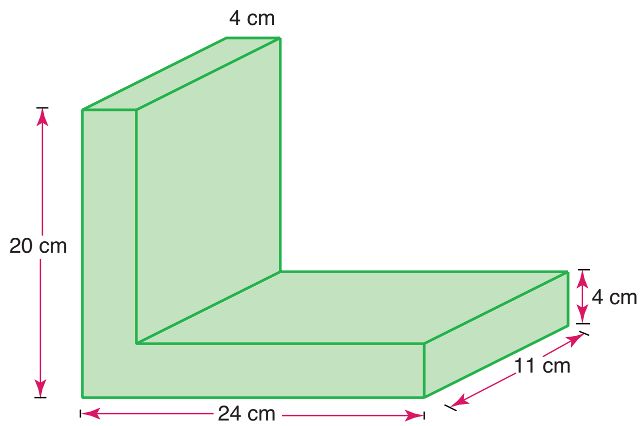
a



b



c



Porcentaje de error

Dos jugadores de golf hacen sus lanzamientos a uno de los hoyos. El primero se encuentra a 100 m del hoyo, y su bola se queda a 4 m. El segundo está a 20 m, y su bola se pasa 4 m. Ambos han cometido un error de 4 m en sus tiros.

De todas formas, si calculamos su porcentaje de error, podemos suponer que el primer jugador estará más contento con su lanzamiento que el segundo.

El porcentaje de error se calcula de la siguiente forma:

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{cantidad total}} \times 100$$

Porcentaje de error del primer jugador: $\frac{4}{100} = 4\%$

Porcentaje de error del segundo jugador: $\frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\%$

Ahora, el resultado del primer jugador parece mucho mejor.

Cuando trabajamos con valores exactos y aproximados podemos utilizar esta fórmula:

$$\text{Porcentaje de error} = \frac{\text{error absoluto}}{\text{cantidad total}} \times 100$$

o

$$\text{Porcentaje de error, } v = \left|\frac{v_E - v_A}{v_E}\right| \times 100$$

donde v_E es el valor exacto y v_A es el valor aproximado.

Ejemplo resuelto

Dos chicas hacen una estimación de sus alturas. La primera estima que mide 168 cm; sin embargo, su altura real es de 160 cm. La segunda estima que mide 112 cm, aunque realmente mide 120 cm.

Calcula el porcentaje de error que cometió cada chica para decidir cuál de ellas lo hizo mejor estimando su altura.

$$\text{Porcentaje de error de la primera chica} = \left|\frac{v_E - v_A}{v_E}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{160 - 168}{160}\right| \times 100 =$$

$$= \frac{8}{160} \times 100 = 5\%$$

$$\text{Porcentaje de error de la segunda chica} = \left|\frac{v_E - v_A}{v_E}\right| \times 100$$

$$= \left|\frac{120 - 112}{120}\right| \times 100 =$$

$$= \frac{8}{120} \times 100 = 6\tfrac{2}{3}\%$$

Por lo tanto, la primera chica hizo una estimación mejor de su altura.

Ejercicio 1.2.5

1 Redondea los siguientes números a dos cifras significativas y calcula el porcentaje de error que se comete con el redondeo.

a 984 **b** 2 450 **c** 504

2 Dos jugadores de golf hacen sus lanzamientos. Ambos estiman que han lanzado la bola a 250 m. Si el primero lo lanzó a 240 m y el segundo a 258 m, ¿cuál de los dos jugadores cometió menos error en su estimación?

3 Un avión vuela a 9 500 m. Si el porcentaje de error es de $\pm 2{,}5\%$, calcula:

a La máxima altura a la que puede estar volando.

b La mínima altura a la que puede estar volando.

4 **a** La velocidad a la que conduzco por una autopista es de 120 km/h, pero mi velocímetro tiene un porcentaje de error de $+1{,}5\%$. ¿A qué velocidad voy realmente?

b A más velocidad, el velocímetro del coche marca 180 km/h. ¿Qué porcentaje de error tiene si realmente voy a una velocidad de 175 km/h?

1.3 Notación científica

Galileo Galilei
(1564–1642)

Galileo fue un físico y astrónomo italiano. Fue la primera persona de la que se tiene constancia que usó un telescopio para observar las estrellas. En 1610, Galileo y Marius, un astrónomo alemán, descubrieron, cada uno por su parte, las cuatro mayores lunas de Júpiter: Io, Europa, Ganimedes y Calisto. En aquella época se creía que el Sol giraba alrededor de la Tierra; sin embargo, Galileo era uno de los pocos que creía que era la Tierra la que giraba alrededor del Sol, por lo que la Iglesia lo declaró hereje y lo condenó a prisión. La Iglesia necesitó 350 años para aceptar que Galileo tenía razón, y no lo perdonó hasta el año 1992.

Cifras sobre Júpiter:

Tiene una masa de 1 900 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

Su diámetro es de 142 800 000 m.

Su distancia media al Sol es de 778 000 000 km.

Encontrarás notación científica en las asignaturas de Física, Química, Biología y Ciencias de la Tierra.

Si se escriben los números de forma normal, la dificultad para leerlos y escribirlos aumenta a medida que aumenta su valor. Podemos escribir números muy grandes y muy pequeños con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y el exponente es un entero positivo o negativo, esto es $k \in \mathbb{Z}$. Esto es escribir un número en **notación científica**.

Con exponente positivo

$100 = 1 \times 10^2$

$1\,000 = 1 \times 10^3$

$10\,000 = 1 \times 10^4$

$3\,000 = 3 \times 10^3$

El número 3 100 se puede escribir de muchas formas, por ejemplo:

$3{,}1 \times 10^3$ $\quad$ 31×10^2 $\quad$ $0{,}31 \times 10^4$, etc.

Pero solo $3{,}1 \times 10^3$ está escrito con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

Ejemplos resueltos

1 Escribe 72 000 con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$7{,}2 \times 10^4$

2 Rodea con un círculo los números que tienen el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$4{,}2 \times 10^3$ $\quad$ $0{,}35 \times 10^2$ $\quad$ 18×10^5 $\quad$ 6×10^3 $\quad$ $0{,}01 \times 10^1$

3 Realiza la siguiente multiplicación y escribe el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$600 \times 4\,000$

$600 \times 4\,000$
$= 2\,400\,000$
$= 2{,}4 \times 10^6$

4 Realiza la siguiente multiplicación y escribe el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$(2{,}4 \times 10^4) \times (5 \times 10^7)$

$(2{,}4 \times 10^4) \times (5 \times 10^7)$
$= (2{,}4 \times 5) \times 10^{4+7}$
$= 12 \times 10^{11}$
$= 1{,}2 \times 10^{12}$

5 Realiza la siguiente operación y escribe el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$(6{,}4 \times 10^7) \div (1{,}6 \times 10^3)$

$(6{,}4 \times 10^7) \div (1{,}6 \times 10^3)$
$= (6{,}4 \div 1{,}6) \times 10^{7-3}$
$= 4 \times 10^4$

6 Realiza la siguiente suma y escribe el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$(3{,}8 \times 10^6) + (8{,}7 \times 10^4)$

Expresa ambos números con el mismo exponente, la suma es:
$(380 \times 10^4) + (8{,}7 \times 10^4)$

$= 388{,}7 \times 10^4$
$= 3{,}887 \times 10^6$

7 Realiza la siguiente resta y escribe el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

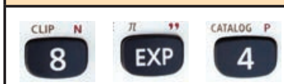
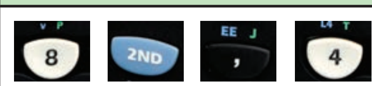
$(6{,}5 \times 10^7) - (9{,}2 \times 10^5)$

Expresa ambos números con el mismo exponente, la resta es:
$(650 \times 10^5) - (9{,}2 \times 10^5)$

$= 640{,}8 \times 10^5$
$= 6{,}408 \times 10^7$

La calculadora gráfica tiene un botón que te permite introducir un número con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$; también dará los resultados de las operaciones con este formato si el número es muy grande.

Por ejemplo, escribe en tu calculadora el número 8×10^4.

Casio	Texas
	
Un número como: 1 000 000 000 000 000 aparecerá en la pantalla como 1E + 15 Esto lo debes escribir como 1×10^{15}, no como lo muestra la calculadora.	Un número como: 1 000 000 000 000 000 aparecerá en la pantalla como 1 E 15 Esto lo debes escribir como 1×10^{15}, no como lo muestra la calculadora.

WEB PERSONAL TUTOR

Ejercicio 1.3.1

1 ¿Cuáles de los siguientes números no están escritos con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$?

a $6{,}2 \times 10^5$ b $7{,}834 \times 10^{16}$ c $8{,}0 \times 10^5$
d $0{,}46 \times 10^7$ e $82{,}3 \times 10^6$ f $6{,}75 \times 10^1$

2 Escribe los siguientes números con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 600 000 b 48 000 000 c 784 000 000 000
d 534 000 e 7 millones f 8,5 millones

3 Escribe los siguientes números con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 68×10^5 b 720×10^6 c 8×10^5
d $0{,}75 \times 10^8$ e $0{,}4 \times 10^{10}$ f 50×10^6

4 Realiza las siguientes multiplicaciones y expresa el resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $200 \times 3\,000$ b $6\,000 \times 4\,000$
c 7 millones $\times$ 20 d $500 \times$ 6 millones
e 3 millones $\times$ 4 millones f $4\,500 \times 4\,000$

5 La luz del Sol tarda aproximadamente 8 minutos en llegar a la Tierra. Si la velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s, calcula con tres cifras significativas (c.s.) la distancia del Sol a la Tierra.

6 Realiza las siguientes operaciones y escribe su resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $(4{,}4 \times 10^3) \times (2 \times 10^5)$ b $(6{,}8 \times 10^7) \times (3 \times 10^3)$
c $(4 \times 10^5) \times (8{,}3 \times 10^5)$ d $(5 \times 10^9) \times (8{,}4 \times 10^{12})$
e $(8{,}5 \times 10^6) \times (6 \times 10^{15})$ f $(5{,}0 \times 10^{12})^2$

7 Realiza las siguientes operaciones y escribe su resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $(3{,}8 \times 10^8) \div (1{,}9 \times 10^6)$ b $(6{,}75 \times 10^9) \div (2{,}25 \times 10^4)$
c $(9{,}6 \times 10^{11}) \div (2{,}4 \times 10^5)$ d $\dfrac{1{,}8 \times 10^{12}}{9{,}0 \times 10^7}$
e $\dfrac{2{,}3 \times 10^{11}}{9{,}2 \times 10^4}$ f $\dfrac{2{,}4 \times 10^8}{6{,}0 \times 10^3}$

8 Realiza las siguientes operaciones y escribe su resultado con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \le a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a $(3{,}8 \times 10^5) + (4{,}6 \times 10^4)$ b $(7{,}9 \times 10^9) + (5{,}8 \times 10^8)$
c $(6{,}3 \times 10^7) + (8{,}8 \times 10^5)$ d $(3{,}15 \times 10^9) + (7{,}0 \times 10^6)$
e $(5{,}3 \times 10^8) - (8{,}0 \times 10^7)$ f $(6{,}5 \times 10^7) - (4{,}9 \times 10^6)$
g $(8{,}93 \times 10^{10}) - (7{,}8 \times 10^9)$ h $(4{,}07 \times 10^7) - (5{,}1 \times 10^6)$

9 En esta lista aparecen las distancias de los planetas del Sistema Solar al Sol.

Júpiter	778 millones de kilómetros
Mercurio	58 millones de kilómetros
Marte	228 millones de kilómetros
Urano	2 870 millones de kilómetros
Venus	108 millones de kilómetros
Neptuno	4 500 millones de kilómetros
Tierra	150 millones de kilómetros
Saturno	1 430 millones de kilómetros

Escribe cada una de las distancias con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$ y ordénalas por orden de magnitud comenzando por los planetas más cercanos al Sol.

Con exponente negativo

Se usan los exponentes negativos cuando se escriben números que están entre 0 y 1, con formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. Por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
100 &= 1 \times 10^2 \\
10 &= 1 \times 10^1 \\
1 &= 1 \times 10^0 \\
0{,}1 &= 1 \times 10^{-1} \\
0{,}01 &= 1 \times 10^{-2} \\
0{,}001 &= 1 \times 10^{-3} \\
0{,}0001 &= 1 \times 10^{-4}
\end{aligned}
$$

Observa que en este caso también se debe cumplir que $1 \leq a < 10$.

Ejemplos resueltos

1 Escribe 0,0032 con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

$3{,}2 \times 10^{-3}$

2 Escribe los siguientes números ordenados por orden de magnitud de mayor a menor.

$3{,}6 \times 10^{-3}$	$5{,}2 \times 10^{-5}$	1×10^{-2}	$8{,}35 \times 10^{-2}$	$6{,}08 \times 10^{-8}$
$8{,}35 \times 10^{-2}$	1×10^{-2}	$3{,}6 \times 10^{-3}$	$5{,}2 \times 10^{-5}$	$6{,}08 \times 10^{-8}$

Ejercicio 1.3.2

1 Escribe los siguientes números con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 0,0006 **b** 0,000053 **c** 0,000864
d 0,000000088 **e** 0,0000007 **f** 0,0004145

2 Escribe los siguientes números con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 68×10^{-5} **b** 750×10^{-9} **c** 42×10^{-11}
d $0{,}08 \times 10^{-7}$ **e** $0{,}057 \times 10^{-9}$ **f** $0{,}4 \times 10^{-10}$

3 Deduce cuál es el valor de k para que se cumplan las siguientes igualdades.

a $0{,}00025 = 2{,}5 \times 10^k$

b $0{,}00357 = 3{,}57 \times 10^k$

c $0{,}00000006 = 6 \times 10^k$

d $0{,}004^2 = 1{,}6 \times 10^k$

e $0{,}00065^2 = 4{,}225 \times 10^k$

4 Escribe los siguientes números en orden decreciente de magnitud.

$3{,}2 \times 10^{-4}$ $6{,}8 \times 10^5$ $5{,}57 \times 10^{-9}$ $6{,}2 \times 10^3$

$5{,}8 \times 10^{-7}$ $6{,}741 \times 10^{-4}$ $8{,}414 \times 10^2$

1.4 Unidades de medida del SI

En un día, un soldado del ejército de Julio César era capaz de andar 20 millas vestido con su uniforme completo y, al final del día, podía ayudar a levantar la construcción defensiva.

La milla era una unidad de longitud que se dividía en 1 000 pasos de un legionario romano. La medida era bastante precisa para la función que cumplía, pero era una distancia aproximada.

La mayoría de las unidades de medida empezaron siendo aproximaciones rudimentarias. Se decía que la yarda (3 pies y 36 pulgadas) era la longitud que había desde la nariz del rey —parece ser que se refería a Enrique I de Inglaterra— hasta la punta de su dedo extendido. A medida que se fueron necesitando medidas estándares, se hicieron cada vez más precisas.

En 1791, durante la Revolución Francesa, se definió una nueva unidad de medida: el metro. En un principio se definió como «una diezmillonésima parte de la longitud del cuadrante del meridiano terrestre que pasa por París». En 1795, esta definición adquirió carácter legal en Francia.

Más adelante se consideró que la definición no era suficientemente precisa y se procuraron nuevas definiciones.

En 1927 se definió el metro como la distancia que había entre dos marcas que se hicieron en una barra de platino iridiado que se guardó en París.

En 1960 la definición de metro se basaba en la emisión de un átomo de criptón 86.

En 1983 en la Conferencia General de Pesas y Medidas, el metro fue redefinido como la distancia recorrida por la luz en el vacío en $\frac{1}{299\,792\,488}$ segundos. Esta definición, aunque no sea muy elegante, se puede considerar como una de las pocas «precisas». La mayoría de las medidas solo tienen precisión hasta cierto nivel.

SI es la abreviación de Sistema Internacional de Unidades. Estas son sus siete unidades básicas:

Volverás a ver las unidades de medida del SI en las asignaturas de Física y Química.

Cantidad	Unidad	Símbolo
Distancia	metro	m
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	amperio	A
Temperatura	kelvin	K
Cantidad de sustancia	mol	mol
Intensidad luminosa	candela	cd

Existen otras unidades derivadas del SI. Los siguientes ejercicios destacan algunas de las unidades de medida derivadas más corrientes y su relación con la medida base.

Ejercicio 1.4.1

1 Copia y completa las siguientes frases.

- **a** Hay ____________ centímetros en un metro.
- **b** Un centímetro es la ____________ parte de un metro.
- **c** Hay ____________ metros en un kilómetro.
- **d** Un metro es la ____________ parte de un kilómetro.
- **e** Hay ____________ gramos en un kilogramo.
- **f** Un gramo es la ____________ parte de un kilogramo.
- **g** Un kilogramo es la ____________ parte de una tonelada.
- **h** Hay ____________ mililitros en un litro.
- **i** Una milésima de un litro es ____________.
- **j** Hay ____________ gramos en una tonelada.

2 ¿Cuál de las siguientes unidades utilizarías para medir lo que se indica a continuación?

milímetro	centímetro	metro	kilómetro
miligramo	gramo	kilogramo	tonelada
mililitro	litro		

- **a** Tu masa (peso).
- **b** La longitud de tu pie.
- **c** Tu peso.
- **d** El agua que cabe en un vaso.
- **e** La masa de un barco.
- **f** La altura de un autobús.
- **g** El volumen de una piscina.
- **h** La longitud de una calle.
- **i** El volumen del depósito de gasolina de un camión.
- **j** El perímetro de tu cintura.

3 Dibuja cinco líneas de distintas longitudes.

- **a** Haz una estimación de sus longitudes en milímetros.
- **b** Mide la longitud de cada línea en milímetros.

4 Haz una estimación para cada una de las siguientes medidas utilizando la unidad correcta.

- **a** Tu altura.
- **b** Tu peso (masa).
- **c** El volumen de un vaso.
- **d** La distancia a la población más cercana.
- **e** La masa de una naranja.
- **f** La cantidad de sangre que hay en el cuerpo humano.
- **g** La profundidad del océano Pacífico.
- **h** La distancia a la Luna.
- **i** La masa de un coche.
- **j** El volumen de una piscina.

Paso de una unidad a otra

Longitud

1 km son 1000 m, por lo tanto:

Para pasar de kilómetros a metros se multiplica por 1000.
Para pasar de metros a kilómetros se divide entre 1000.

Ejemplos resueltos

1 Pasa 5,84 km a metros.

1 km = 1000 m, por lo tanto multiplicamos por 1000.
$5{,}84 \times 1000 = 5840$ m

2 Pasa 3640 mm a metros.

1 m = 1000 mm, por lo tanto dividimos entre 1000.
$3640 \div 1000 = 3{,}64$ m

Ejercicio 1.4.2

1 Pasa las siguientes medidas a milímetros.

a 4 cm **b** 6,2 cm **c** 28 cm **d** 1,2 m
e 0,88 m **f** 3,65 m **g** 0,008 m **h** 0,23 cm

2 Pasa las siguientes medidas a metros.

a 260 cm **b** 8900 cm **c** 2,3 km **d** 0,75 km
e 250 cm **f** 0,4 km **g** 3,8 km **h** 25 km

3 Pasa las siguientes medidas a kilómetros.

a 2000 m **b** 26500 m **c** 200 m **d** 750 m
e 100 m **f** 5000 m **g** 15000 m **h** 75600 m

Masa

1 tonelada son 1000 kg, por lo tanto:

Para pasar de toneladas a kilogramos se multiplica por 1000.

Para pasar de kilogramos a toneladas se divide entre 1000.

Ejemplos resueltos

1 Pasa 0,872 toneladas a kilogramos.

1 tonelada son 1000 kg, así que multiplicamos por 1000.
$0{,}872 \times 1000 = 872$ kg

2 Pasa 4200 kg a toneladas.

1 tonelada = 1000 kg, así que dividimos entre 1000.
$4200 \div 1000 = 4{,}2$ toneladas

Volumen

1 litro son 1000 ml, así:

Para pasar de litros a mililitros se multiplica por 1000.
Para pasar de mililitros a litros se divide entre 1000.

Ejemplos resueltos

1 Pasa 2,4 l a mililitros.

1 l son 1 000 ml, así que multiplicamos por 1 000.

$2{,}4 \times 1000 = 2400$ ml

2 Pasa 4 500 ml a litros.

1 l = 1 000 ml, así que dividimos entre 1 000.

$4500 \div 1000 = 4{,}5$ l

Ejercicio 1.4.3

1 Pasa estas medidas a kilogramos.

a 2 toneladas **b** 7,2 toneladas **c** 2 800 g **d** 750 g
e 0,45 toneladas **f** 0,003 toneladas **g** 6 500 g **h** 7 000 000 g

2 Pasa a mililitros.

a 2,6 l **b** 0,7 l **c** 0,04 l **d** 0,008 l

3 Pasa a litros.

a 1 500 ml **b** 5 280 ml **c** 750 ml **d** 25 ml

4 En un barco hay cuatro contenedores con masas de 28 toneladas, 45 toneladas, 16,8 toneladas y 48 500 kg.

a ¿Cuál es la masa total en toneladas?

b ¿Cuál es la masa total en kilogramos? Escribe la respuesta con el formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

5 Hay tres probetas que contienen 0,08 l, 0,42 l y 220 ml.

a ¿Cuál es el volumen total en mililitros?

b ¿Cuántos litros de agua tienen que añadir para que la disolución tenga 1,25 l?

Unidades de temperatura

En las asignaturas de ciencias te vas a encontrar dos unidades de temperatura diferentes:

grados Celsius °C grados kelvin K

El grado kelvin es la unidad oficial del SI de temperatura. Es igual a la unidad Celsius —pues un cambio de 1 °C equivale a un cambio de 1 K— excepto en que uno comienza con 0 K, que es equivalente a –273 °C. Esta temperatura se conoce como «cero absoluto».

Cero absoluto = 0 K = –273 °C

La tabla muestra el paso entre las unidades de temperatura grados Celsius y grados kelvin.

Unidad	Temperatura de congelación del agua	Temperatura de ebullición del agua
Grado Celsius	0	100
Grado kelvin	273	373

1.5 Conversión de divisas

Se cree que fue alrededor del año 560 a. C., durante el reinado de Creso en Lidia —ahora Lidia forma parte de Turquía— cuando se acuñaron monedas por primera vez. La expresión «tan rico como Creso» se utiliza para referirse a gente muy rica.

Para que un material se pueda utilizar como moneda tiene que ser un «bien escaso». Podría ser el ocre rojo, los diamantes o, en algún caso, hasta los cigarros. Los bienes escasos como el oro se llaman «dinero mercancía». A los billetes, que aparecieron más tarde, se les llama «dinero fiduciario», puesto que el papel en sí mismo no tiene valor, pero puede cambiarse por otros bienes. Las libras esterlinas deben su nombre a que se podían cambiar por una libra de peso de plata esterlina.

¿Cuáles son las ventajas y desventajas del papel moneda comparado con el dinero mercancía?

La Eurozona es un término que describe a los países que sustituyeron sus monedas originales por una moneda común: el euro.

En el 2002, justo antes de su lanzamiento, el cambio del euro con respecto al dólar estadounidense (USD o \$) estaba por debajo de la paridad; es decir, un euro valía menos que un dólar.

En junio del 2008, antes de la crisis bancaria, un euro valía aproximadamente un dólar y sesenta centavos. Algunas veces, el valor de un billete en relación con otra moneda puede cambiar muy rápido.

Con el cambio de monedas los bancos se llevan una comisión (tasa). Esto quiere decir que, cuando en Europa había una gran cantidad de monedas diferentes, los comerciantes perdían dinero al pagar esas comisiones, y las fluctuaciones en los cambios hacían que para los exportadores hacer planificaciones a largo plazo resultara muy difícil.

Las comisiones pueden ser una cantidad fija o un porcentaje del dinero que se cambia. Además, cuando cambias monedas existen dos tarifas: la de cuando vendes y la de cuando compras. Por ejemplo, un banco podría comprar 1 £ esterlina (GBP) por 1,30 \$ y venderla por 1,35 \$. Por lo tanto, si cambias 1 000 £ a dólares, recibirás 1 300 \$, pero si vuelves a cambiar tus dólares por libras te darán $1300 \div 1{,}35 = 963$ £, los cambios te han costado 37 £. Si te hubiesen cobrado una comisión del 3%, te habría costado 30 £ hacer el primer cambio. Por lo tanto, habrías recibido 970 £ $\times 1{,}30 = 1261$ \$.

La siguiente tabla muestra las tasas de cambio de las monedas de los países de la Eurozona cuando adoptaron el euro en el 2002.

País	Moneda	Cambio por 1 euro
Francia	Franco	6,56 francos
Alemania	Marco alemán	1,96 marcos alemanes
Italia	Lira	1 940 liras
España	Peseta	166 pesetas
Holanda	Florín neerlandés	2,20 florines neerlandeses
Austria	Chelín austriaco	13,76 chelines austriacos
Bélgica	Franco belga	40 francos belgas
Finlandia	Marco finlandés	5,95 marcos finlandeses
Grecia	Dracma	341 dracmas
Irlanda	Libra irlandesa	0,79 libras irlandesas
Portugal	Escudo portugués	200 escudos portugueses
Luxemburgo	Franco luxemburgués	40 francos luxemburgueses

El 1 de enero de 2002 el euro se convirtió en moneda única para los doce países de la tabla. Fue el mayor cambio de moneda que jamás se ha visto en Europa. En 2008, Andorra, Chipre, Malta, Montenegro, San Marino, Eslovenia y el Vaticano entraron en el euro. Aún quedan países europeos que no han entrado en la Eurozona, estos son Gran Bretaña, Suecia y Dinamarca. ¿Por qué piensas que estos países todavía no han entrado en el euro?

Nota: Aún no existe un acuerdo universal sobre si el signo € debería escribirse antes o después del número. Esto depende mayormente de las reglas ortográficas que se apliquen en cada lengua y en cada país.

Ejemplo resuelto

Utiliza la tabla de tasas de cambio de arriba para pasar 15 000 pesetas a florines neerlandeses.

De la tabla tenemos que: 166 pesetas = 1 euro = 2,20 florines

166 pesetas = 2,20 florines

$$1 \text{ peseta} = \frac{2{,}20}{166} \text{ florines}$$

$$15\,000 \text{ pesetas} = \frac{2{,}20}{166} \times 15\,000 \text{ florines}$$

Así, 15 000 pesetas = 198,80 florines neerlandeses.

■ Ejercicio 1.5.1

Con la tabla de cambios anterior haz los cambios que se te indican.

1 100 marcos alemanes a francos franceses.

2 500 florines neerlandeses a dracmas.

3 20 000 liras a chelines austriacos.

4 7 500 pesetas a escudos portugueses.

5 1 000 francos belgas a francos franceses.

6 1 millón de libras irlandesas a marcos finlandeses.

7 200 000 liras a pesetas.

8 3 000 marcos alemanes y 1 000 chelines austriacos a libras irlandesas.

9 5 000 marcos alemanes a liras.

10 2 500 florines neerlandeses a chelines austriacos.

Los cambios de divisas se tratan también en la asignatura de Economía.

Esto te da una idea de la cantidad de cambios de moneda que se hacían diariamente en Europa antes del año 2002.

La libra esterlina era una «moneda de reserva». Muchos economistas piensan que el euro podría convertirse en una «moneda de reserva». ¿Qué significa este término?

Las monedas cambian su valor unas con respecto a otras por las variaciones de las situaciones económicas de los países.

Por ejemplo, en 2002 se podía cambiar 1 € por 1,04 $. En 2008 el cambio de 1 € pasó a ser de 1,54 $.

Las tasas de cambio vienen marcadas desde el mercado de de divisas.

En 2008, para los turistas alemanes los EUA eran un país barato. Sin embargo, para los turistas estadounidenses en Europa, todo lo contrario: con sus dólares no podían comprar tantos euros como en años anteriores. Teóricamente, los cambios externos de divisas no afectan al valor interno de la moneda, pero en la práctica los países dependen de las importaciones y exportaciones de bienes y servicios; así, la fortaleza o debilidad de la moneda afecta directamente a los ciudadanos. Por ejemplo, si tu moneda se debilita con respecto al dólar, el precio del petróleo y el gas, que están valorados en dólares, aumentará. A veces, la moneda de un país se debilita tanto que este no puede importar bienes. En 2008 la moneda de Zimbabue dejó de aceptarse en las transacciones con el extranjero: la economía se resintió seriamente y muchos zimbabuenses perdieron su trabajo.

Ejemplo resuelto

En 2001 Kurt y su familia hicieron un viaje a los EUA. El vuelo les costó 1650 \$, los hoteles costaron 2200 \$ y tuvieron otros gastos que ascendieron a 4000 \$. En esa época, la tasa de cambio estaba a 1 € = 1,05 \$.

En 2008 repitieron las vacaciones, pero entonces los precios en dólares habían subido un 10%; la tasa de cambio era de 1 € = 1,55 \$.

a ¿Cuántos euros se gastaron en total en el viaje de 2001?

b ¿Cuántos euros se gastaron en total en el viaje de 2008?

a Coste total en dólares = 7850 \$

1,05 \$ = 1 € ⇒ 1 \$ = 0,95 €

Por lo tanto, el coste total en euros fue de 7850 × 0,95 = 7476 €.

b Un aumento del 10% se halla multiplicando por 1,10.

Coste total en dólares = 7850 × 1,10 = 8635 \$

1,55 \$ = 1 € ⇒ 1 \$ = 0,65 €

Por lo tanto, el coste total en euros fue de 8635 × 0,65 = 5613 €.

Ejercicio 1.5.2

1 La tasa de cambio del rand sudafricano es de 1 £ = 12,8 rand. 1 £ = 1,66 dólares estadounidenses.

a ¿Cuántas libras se obtienen cambiando 100 rand?

b ¿Cuántos rand se obtienen cambiando 1000 \$?

2 Se vende un apartamento en Barcelona por 350000 €. La tasa de cambio es de 1 £ = 1,24 €.

a ¿Qué precio tiene el apartamento en libras?

b Si el valor de la libra aumenta en un 10% con respecto al euro, ¿cuánto costará el apartamento?

3 El yen japonés se cambia a 190 ¥ × por 1 £. El dólar se cambia a 1,90 \$ por libra.

a ¿Cuál es la tasa de cambio del yen al dólar?

b ¿Cuál es la tasa de cambio del dólar al yen?

4 El rublo ruso se cambia a 24 rublos por 1 \$. El siclo israelí se cambia a 3,5 siclos por 1 \$.

a ¿Cuál es la tasa de cambio del rublo al siclo?

b ¿Cuál es la tasa de cambio del siclo al rublo?

5 El precio del oro está a 930 \$ por onza. 16 onzas = 1 libra de peso.

a ¿Cuánto cuesta una tonelada (2240 libras) de oro?

1 dólar = 0,62 euros y 1 dólar = 41 rupias indias.

b ¿Cuánto cuesta 1 tonelada de oro en rupias?

c ¿Cuánto cuesta 1 tonelada de oro en euros?

d ¿Qué peso (en onzas) de oro se puede comprar por 1 millón de euros?

1.6 Resolución gráfica de ecuaciones

Cuándo dibujamos los puntos de una ecuación lineal obtenemos una recta.

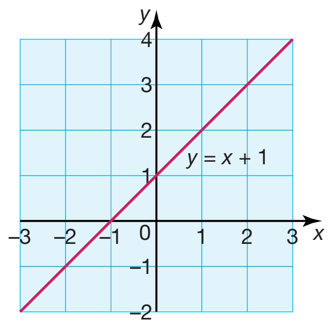
Las ecuaciones lineales:

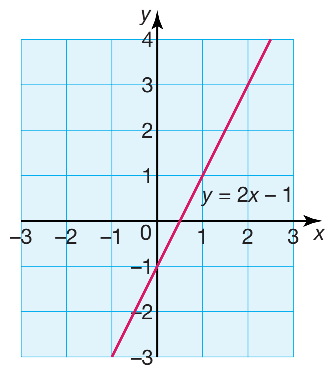
$y = x + 1$ $\quad$ $y = 2x - 1$ $\quad$ $y = 3x$ $\quad$ $y = -x - 2$ $\quad$ $y = 4$

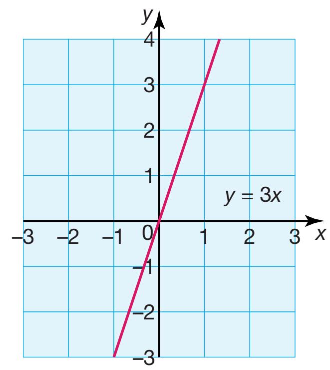
se escriben con un formato parecido, $y = mx + c$.

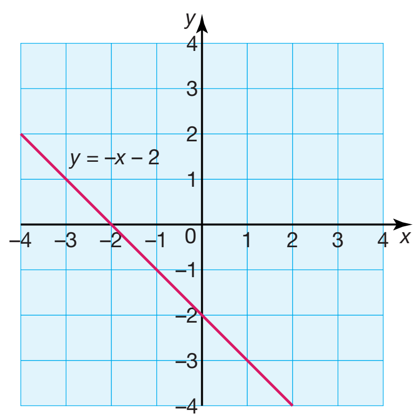
En la ecuación	$y = x + 1$,	$m = 1$ y $c = 1$
	$y = 2x - 1$,	$m = 2$ y $c = -1$
	$y = 3x$,	$m = 3$ y $c = 0$
	$y = -x - 2$,	$m = -1$ y $c = -2$
	$y = 4$,	$m = 0$ y $c = 4$

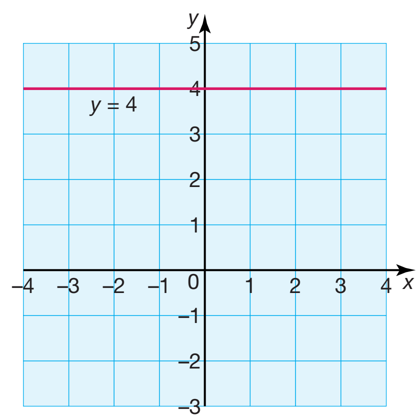
Sus gráficas son las siguientes:







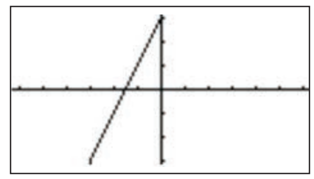




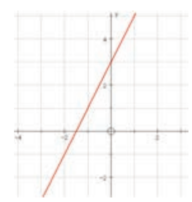
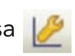
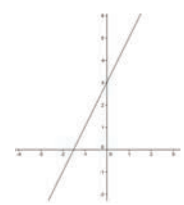
Esto se ve con más detalle en el apartado 5.1 sobre representación y resolución de ecuaciones lineales, pero en este apartado vamos a estudiar cómo utilizar la CG y otros programas para dibujar gráficas de rectas y para resolver problemas sencillos relacionados con estas.

Representación de ecuaciones lineales con CG y programas gráficos

En la Introducción a la calculadora gráfica vimos cómo representar una ecuación lineal; por ejemplo, para dibujar la ecuación lineal $y = 2x + 3$:

Casio	
	

Esto también se puede hacer fácilmente con un programa de representación gráfica:

Autograph	
Selecciona  e introduce la ecuación.	
Para mover la gráfica en la pantalla utiliza . Para cambiar la escala de los ejes usa .	
GeoGebra	
Escribe $f(x) = 2x + 3$ en la caja entrada.	
Nota: Para mover la gráfica en la pantalla utiliza . Para cambiar la escala de los ejes selecciona «Options» (opciones) y luego, «Drawing pad» (bloc de dibujo).	

Excepto si son paralelas, las gráficas de dos rectas dibujadas sobre los mismos ejes se cortan en un punto. Si resuelves el sistema de ecuaciones de esas dos rectas, obtendrás las coordenadas del punto de intersección. También puedes obtener esas coordenadas con tu CG y con los programas gráficos.

Ejemplo resuelto

Halla el punto de intersección de las siguientes ecuaciones lineales.

$y = 2x - 1$ e $y = \frac{1}{2}x + 2$

Con la CG:

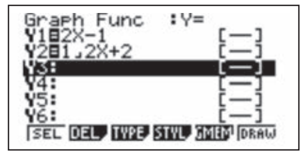
Casio

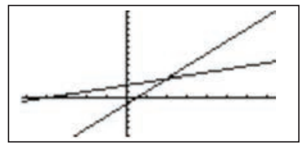
  e introduce $y = 2x - 1$, 

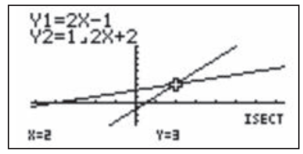
Introduce $y = \frac{1}{2}x + 2$, 

Pulsa  para dibujar las gráficas.

Pulsa   seguido de  para seleccionar «intersect» en el menú «graph solve». El resultado aparecerá en la parte baja de la pantalla.







Las ecuaciones lineales se tienen que escribir con el formato $y = \ldots$

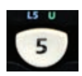
Si quisieras representar la ecuación $2x - 3y = 9$ tendrías que despejar la y para que tenga ese formato: $y = \dfrac{2x - 9}{3}$ o $y = \frac{2}{3}x - 3$.

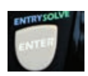
Texas

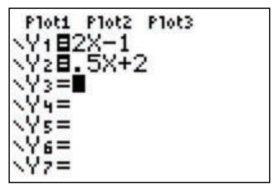
Pulsa  e introduce $y = 2x - 1$, 

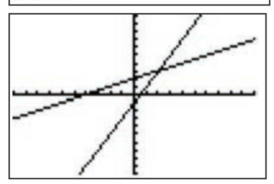
Después $y = \frac{1}{2}x + 2$, 

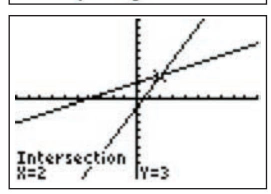
Pulsa  para dibujar las gráficas.

Pulsa   seguido de  para seleccionar «intersect» en el menú «graph calc».

Una vez que hayas seleccionado las dos rectas pulsando  aparecerá el resultado en la parte baja de la pantalla.

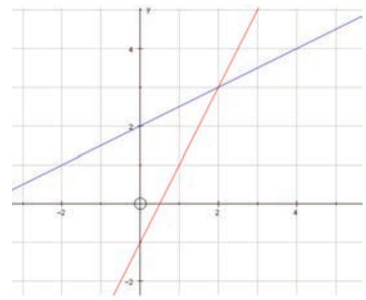
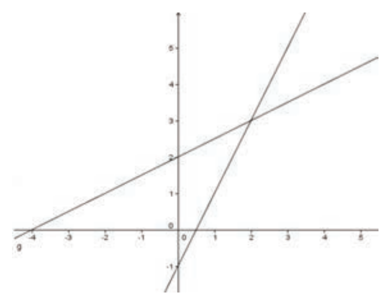






Recuerda el comentario anterior de la calculadora Casio sobre cómo escribir las ecuaciones lineales.

Con programas gráficos:

Autograph	
Selecciona e introduce las ecuaciones. Utiliza para seleccionar las dos rectas. Pulsa en «Object» y, luego el submenú «solve $f(x) = g(x)$». Pulsa para que aparezca el resultado en la «Results box».	
Para seleccionar la segunda recta mantén pulsada la techa de mayúsculas «shift».	
GeoGebra	
Escribe $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$, en la pantalla de entrada. Escribe «Intersect [$f(x)$, $g(x)$]» en la pantalla de entrada. Se marcará el punto de intersección, y sus coordenadas aparecerán en la ventana algebraica.	

Ejercicio 1.6.1

1 Utiliza la CG o alguno de los programas gráficos para encontrar los puntos de intersección de cada uno de los siguientes pares de rectas.

a $y = 5 - x$ e $y = x - 1$

b $y = 7 - x$ e $y = x - 3$

c $y = -2x + 5$ e $y = x - 1$

d $x + 3y = -1$ e $y = \frac{1}{2}x + 3$

e $x - y = 6$ y $x + y = 2$

f $3x - 2y = 13$ y $2x + y = 4$

g $4x - 5y = 1$ y $2x + y = -3$

h $x = y$ y $x + y + 6 = 0$

i $2x + y = 4$ y $4x + 2y = 8$

j $y - 3x = 1$ e $y = 3x - 3$

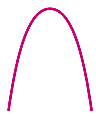
2 Explica las respuestas de **i** y **j** del ejercicio anterior teniendo en cuenta el comportamiento de las rectas.

Ecuaciones de segundo grado o cuadráticas

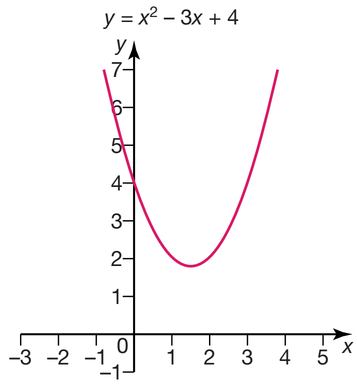
Una ecuación del tipo $y = ax^2 + bx + c$, donde el mayor exponente de la variable x es x^2, es una **ecuación de segundo grado** o **ecuación cuadrática**. Son ecuaciones de segundo grado:

$y = x^2 + 2x - 4$ $\qquad y = -3x^2 + x + 2$ $\qquad y = x^2$ $\qquad y = \frac{1}{2}x^2 + 2$

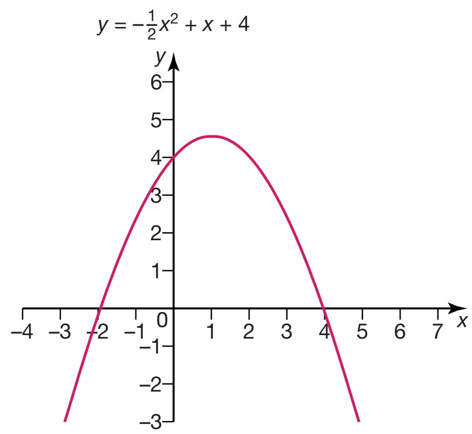
La gráfica de una ecuación de segundo grado es la **parábola**, y su representación es

 o 

Dependiendo de los valores de a, b y c, la posición y la forma de la parábola serán diferentes, por ejemplo:



$a = 1$, $b = -3$ y $c = 4$



$a = \frac{1}{2}-$, $b = 1$ y $c = 4$

Al resolver la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ se están encontrando los puntos en los que la curva corta al eje X, pues $y = 0$ en todos los puntos del eje X.

En el caso anterior, $-\frac{1}{2}x^2 + x + 4 = 0$, puesto que la gráfica corta al eje X cuando $x = -2$ y $x = 4$, estas serán las soluciones de la ecuación. En el caso de $x^2 + 3x + 4 = 0$, puesto que la gráfica no corta al eje de las X, la ecuación no tiene soluciones reales.

(Nota: Existen soluciones imaginarias, pero en este libro de texto no abordaremos tal tema).

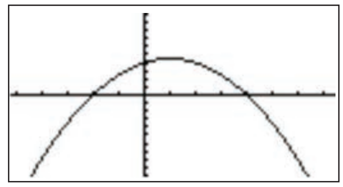
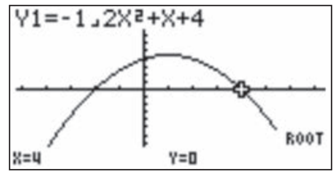
También podemos hallar las soluciones de una ecuación de segundo grado con una CG:

<table>
<tr><th colspan="2">Casio</th></tr>
<tr><td>
Pulsa   e introduce $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$,

pulsa   para obtener la gráfica.

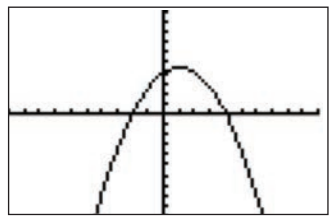
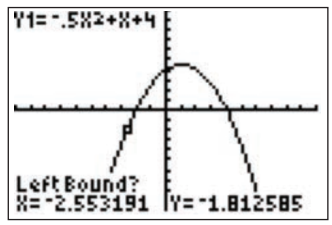
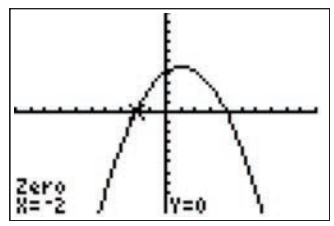
Con  , y luego  para seleccionar «Root» en el menú «graph solve».

Utiliza  para encontrar la segunda raíz.

El resultado aparece en la parte baja de la pantalla.
</td><td>


</td></tr>
<tr><th colspan="2">Texas</th></tr>
<tr><td>
Pulsa  e introduce $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$, 

Pulsa  para obtener la gráfica.

Con  , y luego  seleccionas «zero» en el menú de «graph calc».

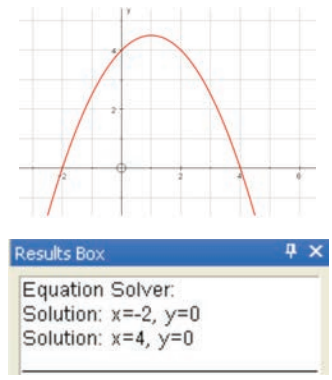
Utiliza  y sigue las indicaciones de la pantalla para identificar los puntos de corte a la izquierda y derecha para obtener las raíces.
</td><td>



</td></tr>
</table>

También se pueden utilizar los programas gráficos:

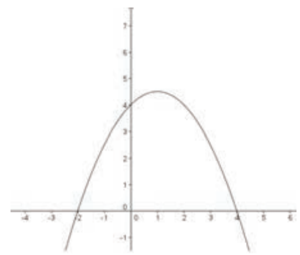
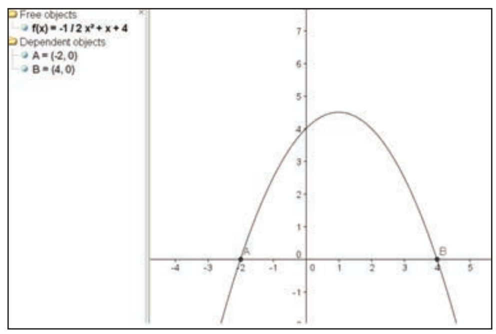
<table>
<tr><th colspan="2">Autograph</th></tr>
<tr><td>Selecciona  e introduce la ecuación $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

Utiliza  para seleccionar la recta.

Pulsa en «Object» y, luego el submenú «solve $f(x) = 0$».

Pulsa  para que aparezca el resultado en la «Results Box».</td><td></td></tr>
<tr><th colspan="2">GeoGebra</th></tr>
<tr><td>Escribe $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ en la pantalla de entrada.

Escribe «Root [$f(x)$]» en la pantalla de entrada.

Aparecen marcados los puntos de corte en la gráfica, y encontrarás sus coordenadas en la ventana algebraica.</td><td>
</td></tr>
</table>

Ejercicio 1.6.2

Utiliza la CG o los programas gráficos para:

i) Representar las siguientes funciones cuadráticas.

ii) Encontrar las coordenadas de las raíces si las hubiera.

1 **a** $y = x^2 - 3x + 2$ **b** $y = x^2 + 4x - 12$
c $y = -x^2 + 8x - 15$ **d** $y = x^2 + 2x + 6$
e $y = -x^2 + x + 4$

2 **a** $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ **b** $4y = -x^2 + 6x + 16$
c $-2y = x^2 + 10x + 25$

1.7 Progresiones y series aritméticas

Leonardo de Pisa (1170-1245), más conocido como Fibonacci, introdujo en Europa nuevos métodos aritméticos de origen hindú, persa y árabe. También trajo la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13…, que hoy en día se conoce como la «sucesión de Fibonacci», que aparece en numerosas estructuras naturales, así como en elementos arquitectónicos.

Otras aportaciones que recuperó para Europa fueron el sistema decimal, el álgebra y un nuevo método de multiplicación. A Leonardo «Fibonacci» se le describe como el matemático con más talento de la Edad Media.

Blaise Pascal (1623-1642) fue otro genio que ya estudiaba geometría cuando era un niño. A los dieciséis años enunció y demostró lo que se conoce como «teorema de Pascal», que trata de la posibilidad de conectar seis puntos cualesquiera de un cono. A este teorema también se le llama «el juego de la cuerda». Además, creó la teoría de la probabilidad e hizo importantes contribuciones al cálculo. El famoso triángulo de Pascal, que asocia sucesiones y probabilidad, tiene la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

Cada número de una fila se obtiene sumando los dos números que están situados por encima de él.

Una **sucesión** es una colección de términos organizados con un orden específico, donde cada término se halla aplicando una regla. Estos son algunos ejemplos sencillos de sucesiones:

2, 4, 6, 8, 10	1, 4, 9, 16, 25	1, 2, 4, 8, 16
1, 1, 2, 3, 5, 8	1, 8, 27, 64, 125	10, 5, $\frac{5}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{5}{8}$

Con algún compañero intenta encontrar la regla que siguen estas sucesiones.

Los términos de una sucesión se escriben como u_1, u_2, u_3 …, u_n donde

u_1 es el primer término
u_2 es el segundo término
u_n es el enésimo término o término general

Así, en la sucesión 2, 4, 6, 8, 10, $u_1 = 2$, $u_2 = 4$, etc.

Progresiones aritméticas

Una **progresión aritmética** es una sucesión en la que la resta de dos términos consecutivos es constante, llamamos a esta constante **diferencia** (*d*). Por ejemplo:

$$3 \xrightarrow{+3} 6 \xrightarrow{+3} 9 \xrightarrow{+3} 12 \xrightarrow{+3} 15 \qquad d = 3$$

$$7 \xrightarrow{-5} 2 \xrightarrow{-5} -3 \xrightarrow{-5} -8 \xrightarrow{-5} -13 \qquad d = -5$$

Término general de una progresión aritmética

La fórmula que describe el término enésimo de una sucesión se llama **término general de la sucesión**. Existen dos formas de definir el término general de una sucesión:

1 Con una **relación de recurrencia**; es decir, basándose en el término anterior para definir el siguiente. Por ejemplo, en la siguiente sucesión:

$$7 \xrightarrow{+5} 12 \xrightarrow{+5} 17 \xrightarrow{+5} 22 \xrightarrow{+5} 27$$

la relación de recurrencia es +5; es decir, $u_2 = u_1 + 5$, $u_3 = u_2 + 5$, etc.

Por lo tanto, el término general sería $u_{n+1} = u_n + 5$, $u_1 = 7$, donde u_n es el término enésimo y u_{n+1} es el término siguiente.

Nota: Para que la sucesión pueda generarse, es importante dar u_n valor a uno de sus términos; por ejemplo, u_1.

2 Con una fórmula que tenga en cuenta la posición del término.

Este tipo de regla asocia cada término a su posición en la sucesión, por ejemplo:

Posición	1	2	3	4	5	*n*
Término	7	12	17	22	27	

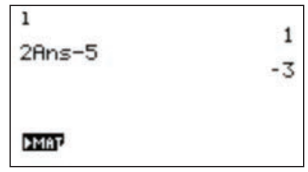
Así, deducimos que el valor de cada posición se obtiene si multiplicamos su posición por 5 y le sumamos 2. Por lo tanto, el término general será:

$u_n = 5n + 2$

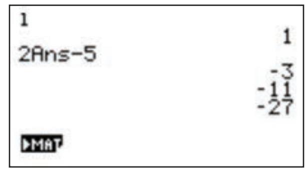
Se puede utilizar la CG para generar los términos de una sucesión partiendo de una relación de recurrencia. Por ejemplo, para calcular u_2, u_3 y u_4 de la sucesión $u_{n+1} = 2u_n - 5$, con $u_1 = 1$, se puede hacer lo siguiente:

Casio

 Así se introduce el primer término.



De esta forma recupera el resultado anterior y lo sustituye en la ecuación.

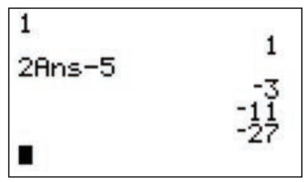


Así se incluye el nuevo resultado en la relación de recurrencia y genera un nuevo término.

Texas

 Así se introduce el primer término.

De esta forma recupera el resultado anterior y lo sustituye en la ecuación.



Así se incluye el nuevo resultado en la relación de recurrencia y genera un nuevo término.

Por lo tanto, $u_2 = -3$, $u_3 = -11$ y $u_4 = -27$.

Nota: Esta sucesión no es una progresión aritmética, pues la diferencia entre un término y el anterior no es constante.

La regla para hallar el término general de una progresión aritmética se deduce fácilmente si se tiene en cuenta la diferencia, *d*.

Posición	1	2	3	4	5	
Término	1	5	9	13	17	$u_n = 4n - 3$
	+4	+4	+4	+4		

Posición	1	2	3	4	5	
Término	7	9	11	13	15	$u_n = 2n + 5$
	+2	+2	+2	+2		

Posición	1	2	3	4	5	
Término	12	9	6	3	0	$u_n = -3n + 15$
	-3	-3	-3	-3		

El coeficiente de n es la diferencia entre un término y el anterior (el número que multiplica a n). La constante se calcula hallando el número que falta sumar para conseguir el valor del término.

Ejemplos resueltos

1 Una sucesión está definida por la siguiente relación de recurrencia:

$u_{n+1} = 4u_n - 3$, con $u_1 = 2$

Calcula u_2, u_3 y u_4 y determina si la sucesión es una progresión aritmética o no.

$u_2 = 4u_1 - 3$, así $u_2 = 4 \times 2 - 3 = 5$

$u_3 = 4u_2 - 3$, así $u_3 = 4 \times 5 - 3 = 17$

$u_4 = 4u_3 - 3$, así $u_4 = 4 \times 17 - 3 = 65$

La sucesión no es una progresión aritmética porque la diferencia entre sus términos no es constante.

2 Halla término general de la sucesión 12, 7, 2, –3, –8, …

Posición	1	2	3	4	5	
Término	12	7	2	–3	–8	$u_n = -5n + 17$
	-5	-5	-5	-5		

Ejercicio 1.7.1

1 Con la relación de recurrencia de las siguientes sucesiones y su primer término, u_1, calcula u_2, u_3 y u_4 y determina si son progresiones aritméticas o no.

a $u_{n+1} = u_n + 5,\ u_1 = 3$

b $u_{n+1} = 2u_n - 4,\ u_1 = 1$

c $u_{n+1} = -4u_n + 1,\ u_1 = 0$

d $u_{n+1} = 3 - u_n,\ u_1 = 5$

e $u_{n+1} = -4 + u_n,\ u_1 = 8$

f $u_{n+1} = 6 - \frac{1}{3} u_n,\ u_1 = -9$

2 Para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

i) Deduce el término general.

ii) Calcula el término que está en la décima posición.

a 5, 8, 11, 14, 17

b 0, 4, 8, 12, 16

c $\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 3\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}$

d 6, 3, 0, –3, –6

e –7, –4, –1, 2, 5

f –9, –13, –17, –21, –25

3 Copia y completa las siguientes tablas de progresiones aritméticas.

a

Posición	1	2	5		50	n
Término				45		$4n - 3$

b

Posición	1	2	5			n
Término				59	449	$6n - 1$

c

Posición	1				100	n
Término		0	–5	–47		$-n+3$

d

Posición	1	2	3		100	n
Término	3	0	–3	–24	–294	

e

Posición		5	7			n
Término	1	10	16	25	145	

f

Posición	1	2	5		50	n
Término	–5,5	–7		–34		

4 De cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

i) Deduce la diferencia, d.

ii) Escribe la fórmula de la enésima posición.

iii) Calcula el término $u50$.

a 5, 9, 13, 17, 21

b 0, __ , 2 , __ , 4

c –10 , __ , __ , __ , 2

d $u_1 = 6$, $u_9 = 10$

e $u_3 = -50$, $u_{20} = 18$

f $u_5 = 60$, $u_{12} = 39$

5 Judi ingresa 200 $ en un depósito que ofrece un interés del 12,5% al año. Cada año, ella recibe un cheque con los intereses. ¿Cuántos años tienen que pasar para que los intereses se igualen al depósito?

Series

A la suma de los términos de una sucesión se le llama **serie**. Las series tienen una notación específica con la que debes familiarizarte.

Considera la progresión aritmética 3, 6, 9, 12, 15, …

S_n se utiliza para definir la suma de los n primeros términos de la sucesión.

S_4 sería la suma de los cuatro primeros términos de la sucesión, es decir:

$S_4 = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$

La letra griega Σ también se utiliza para indicar la suma de una sucesión. El término general de la sucesión anterior, como es una progresión aritmética, es $u_n = 3n$.

$\sum_1^4 3n$ sería la suma de los cuatro primeros términos de la sucesión $u_n = 3n$.

$\sum_1^4 3n = 3 + 6 + 9 + 12 = 30$

De la misma forma $\sum_6^8 3n$ denota que se suma desde el sexto término al octavo de la sucesión $u_n = 3n$.

$\sum_6^8 3n = 18 + 21 + 24 = 63$

Ejemplos resueltos

1 Escribe todos los términos de la suma $\sum_{1}^{5} 2n - 6$.

$\sum_{1}^{5} 2n - 6 = -4 + -2 + 0 + 2 + 4$

2 Determina $\sum_{3}^{7}(-n + 4)$

$\sum_{3}^{7}(-n + 4) = 1 + 0 + -1 + -2 + -3 = -5$

3 Escribe la serie $0 + \frac{1}{2} + 1 + 1\frac{1}{2} + 2 + 2\frac{1}{2}$ usando la notación de Σ.

El término general es $u_n = \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

Por lo tanto, la serie se escribiría $\sum_{1}^{6}\left(\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}\right)$

WEB PERSONAL TUTOR

WEB POWERPOINTS

La suma de progresiones aritméticas

Considera la suma de los 100 primeros números enteros positivos; es decir, 1 + 2 + 3 + … + 98 + 99 + 100. Hay una forma muy eficaz de hacer esta suma sin tener que sumar término a término.

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$

Todos los sumandos de la serie se pueden emparejar como se muestra arriba. La suma de cada par es 101, y hay 50 pares; por lo tanto, la suma de la serie será $50 \times 101 = 5050$.

Este razonamiento se puede generalizar para cualquier progresión aritmética como:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

donde u_1 es el primer término y u_n es el último, el número de términos es n.

El término general de la progresión también se puede escribir en función de u_1, n y d (la diferencia).

Consideremos la progresión aritmética 2, 5, 8, 11, ... Para calcular el término que está en la posición 20 podemos utilizar el término general $u_n = 3n - 1$, o tener en cuenta las veces que se debe sumar d al primer término para llegar al veinteavo:

$$2 \xrightarrow{+3} 5 \xrightarrow{+3} 8 \xrightarrow{+3} 11\ldots$$

Para obtener el término 2, se le suma una vez +3 al primer término (2). Para obtener el término 3, se le suma dos veces +3 al primer término. Así, para obtener el término 20, se le sumará 19 veces +3 al primer término:

$$u_{20} = 2 + (19 \times 3) = 59$$

Por lo tanto, el término general será $u_n = u_1 + (n - 1)d$

Si lo sustituimos por u_n en la fórmula $S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$, obtenemos otra expresión para S_n:

$$S_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_1 + (n - 1)d)$$

$$S_n = \frac{n}{2}(2u_1 + (n - 1)d)$$

En la sucesión 2, 5, 8, 11, ..., calcularíamos $S_{20} = \frac{20}{2}(2 \times 2 + (20 - 1)3) = 610$

La suma de una progresión aritmética también se puede calcular utilizando la CG. Aunque en un examen se debe escribir todo el proceso que se ha seguido, la CG sirve de ayuda para comprobar la solución.

Por ejemplo, calcula $\sum_{1}^{20}(3n - 1)$:

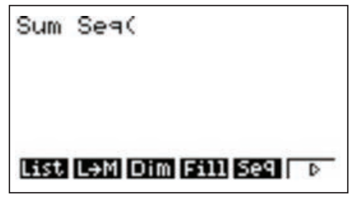
Casio

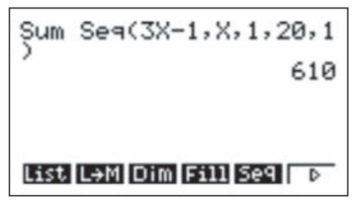
Pulsa 

para acceder a la función «sum» (suma) del menú «List» (lista).

Teclea  para seleccionar «sequence» (sucesión).

Para definir la serie escribe (3X – 1, X, 1, 20, 1). Así estás introduciendo (el término general de la sucesión, la variable, la posición en la que empieza la suma, la posición en la que termina, el incremento).

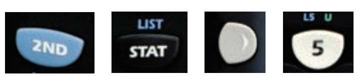




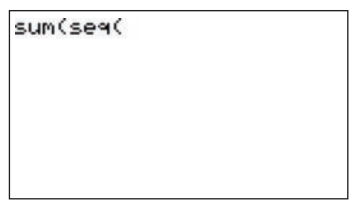
Texas

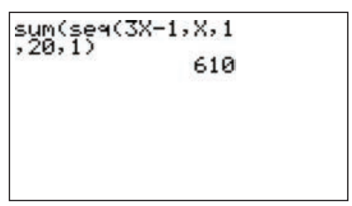
Pulsa 

Para acceder a la función «sum» (suma) del menú «MATH».

Teclea 

para seleccionar «sequence» (sucesión) del menú OPS. Para definir la serie escribe (3X – 1, X, 1, 20, 1). Así estás introduciendo (el término general de la sucesión, la variable, la posición en la que empieza la suma, la posición en la que termina, el incremento).





Ejemplos resueltos

1 Calcula $\sum_{1}^{100} 2n$

Esta es la suma de los 100 primeros números pares.

$S_{100} = \frac{100}{2}(2 \times 2 + (100 - 1)2) = 10\,100$

2 Calcula $\sum_{50}^{100}(2n - 8)$.

Esta es la suma de los términos del 50 al 100 de la progresión $u_n = 2n - 8$.

Para esta progresión, la diferencia es $d = 2$.

Podemos calcular la suma de dos formas:

i) $\sum_{50}^{100}(2n - 8) = \sum_{1}^{100}(2n - 8) - \sum_{50}^{49}(2n - 8)$

$= 9\,300 - 2\,058$

$= 7\,242$

ii) $\sum_{50}^{100}(2n - 8) = u_{50} + u_{51} + \ldots + u_{100}$

$= 92 + 94 + \ldots + 192$

Es decir, $u_1 = 92$, $n = 51$, $d = 2$

Por lo tanto, $\sum_{50}^{100}(2n - 8) = \frac{51}{2}(2 \times 92 + (51 - 1)2) = 7\,242$.

3 Cuatro términos consecutivos de una progresión aritmética son $x + 8$, $2x + 6$, $4x - 8$ y $3x + 14$.

a Calcula la suma de los cuatro términos en función de x.

b Calcula la suma de los cuatro términos.

a $x + 8 + 2x + 6 + 4x - 8 + 3x + 14 = 10x + 20$

b La diferencia, d, de la progresión es $d = 2x + 6 - (x + 8) = x - 2$

La diferencia, d, de la progresión es también $d = 4x - 8 - (2x + 6) = 2x - 14$

Así, $x - 2 = 2x - 14$

$x = 12$

La suma de los cuatro términos es $= 10x + 20$

$= 10 \times 12 + 20$

$= 140$

Ejercicio 1.7.2

1 Halla las sumas de las siguientes series aritméticas.

a $3 + 8 + 13 + \ldots + 53$

b $\frac{1}{2} + 4\frac{1}{2} + 8\frac{1}{2} + \ldots + 60\frac{1}{2}$

c $21 + 17 + 13 + \ldots + -43$

d $100 + 95 + \ldots + -100$

2 Calcula las siguientes sumas.

a $\sum_{1}^{10}(4 - n)$

b $\sum_{1}^{20}\left(\frac{n}{2} - 10\right)$

c $\sum_{10}^{20}(3n - 50)$

d $\sum_{1}^{n}\left(\frac{n}{2} + 4\right)$

3 Los términos segundo y sexto de una serie aritmética son –2 y 10 respectivamente. Calcula:

a La diferencia, d.

b El primer término.

c El término 20.

d S_{20}.

4 El décimo término de una serie aritmética es 18,5. Si $S_{10} = 95$, calcula:

a El primer término.

b La diferencia, d.

c S_{50}.

5 Los términos quinto, sexto y séptimo de una serie aritmética son $3 - 3m$, $m - 9$ y $9 - m$ respectivamente. Calcula:

a La diferencia, d.

b El primer término.

c La suma de los diez primeros términos.

6 El cuarto término de una serie aritmética es el doble que el primero, x. Si el décimo término es 24, calcula:

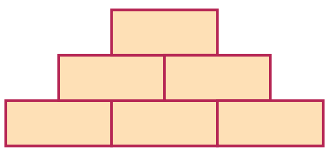
a La diferencia, d.

b El primer término.

c La suma de los diez primeros términos.

7 El primer término de una serie aritmética es 19, y el último, –51. Si la suma de la serie es –176, calcula cuántos términos tiene la serie.

8 Un niño construye una estructura triangular con ladrillos. Las tres últimas filas son así:



Cada fila tiene un ladrillo menos que la inferior.

a Demuestra que, si la construcción tuviese n filas, el número total de ladrillos utilizados se calcularía con la expresión $S_n = \frac{n}{2}(n + 1)$

b Si se han utilizado 78 ladrillos en la construcción, ¿cuántas filas tiene?

c Si el niño tiene 200 ladrillos, ¿cuántas filas puede construir como máximo?

WEB SPREADSHEETS

1.8 Progresiones y series geométricas

Hasta ahora hemos visto sucesiones en las que la diferencia entre dos términos era constante, pero hay otros tipos de sucesiones; por ejemplo, 2, 4, 8, 16, 32.

Esta sucesión sigue claramente un patrón para generar los términos: cada término es el doble del anterior; sin embargo, no se mantiene constante la diferencia entre sus términos consecutivos.

Una **progresión geométrica** es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, al que llamamos **razón** (r). Por ejemplo:

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{\times 2} 8 \xrightarrow{\times 2} 16 \xrightarrow{\times 2} 32 \qquad r = 2$$

$$27 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 9 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \tfrac{1}{3} \qquad r = \tfrac{1}{3}$$

Como en las progresiones aritméticas, hay dos formas de describir las progresiones geométricas:

1 Hallando cada término a partir del anterior.

Por ejemplo, para la sucesión:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \qquad r = 2$$

$u_2 = 2u_1$ $\qquad$ $u_3 = 2u_2$

el término general es $u_{n+1} = 2u_n$, $u_1 = 3$.

2 Hallando el enésimo término a partir del primero y de la razón.

Como en una progresión aritmética, esta fórmula relaciona cada término con su posición en la sucesión. Por ejemplo:

Posición	1	2	3	4	5	n
Término	3	6	12	24	48	

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48$$

para hallar el segundo término el cálculo es 3×2 o 3×2^1
para hallar el tercer término el cálculo es $3 \times 2 \times 2$ o 3×2^2
para hallar el cuarto término el cálculo es $3 \times 2 \times 2 \times 2$ o 3×2^3

En general:
$u_n = u_1 r^{n-1}$

donde u_1 es el primer término y r es la razón.

Ejercicio 1.8.1

1 Determina cuáles de las siguientes sucesiones son progresiones geométricas y cuáles no.

a 2, 6, 18, 54 $\qquad$ **b** 25, 5, 1, $\frac{1}{5}$ $\qquad$ **c** 1, 4, 9, 16

d –3, 9, –27, 81 $\qquad$ **e** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}$ $\qquad$ **f** $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{4}{8}, \frac{8}{16}$

2 De las progresiones geométricas del ejercicio 1 calcula:

a La razón, r.
b Los dos términos siguientes.
c El término general de la progresión.

3 El término general de una progresión geométrica es $u_n = -6 \times 2^{n-1}$.

a Calcula u_1, u_2 y u_3.
b ¿Cuánto vale n si $u_n = -768$?

4 Teniendo en cuenta los términos de la sucesión:

__, −1, __, __, 64, __ donde $u_2 = -1$ y $u_5 = 64$, calcula:

a La razón, r.
b El valor de u_1.
c El valor de u_{10}.

Series geométricas

Se le llama **serie geométrica** a la suma de los términos de una progresión geométrica. Las siguientes series son geométricas:

Posición	1	2	3	4	5	6
Término	5	10	20	40	80	160

La fórmula del término general es $u_n = 5 \times 2^{n-1}$.

Por lo tanto, la suma de la serie anterior se expresa y se calcula de la siguiente forma:

$$5\sum_{1}^{6} 2^{n-1} = 5(1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32) = 315$$

La expresión general de la suma S_n de una serie geométrica se deduce dando los siguientes pasos:

$$S_n = u_1 + u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + \ldots + u_1 r^{n-1}$$

Se multiplica por r: $rS_n = u_1 r + u_1 r^2 + u_1 r^3 + \ldots + u_1 r^{n-1} + u_1 r^n$

Se resta la primera ecuación de la segunda:

$$rS_n - S_n = u_1 r^n - u_1$$

$$S_n(r-1) = u_1(r^n - 1)$$

Así, al despejar S_n se obtiene: $S_n = \dfrac{u_1(r^n - 1)}{r - 1} \qquad r \neq 1$

donde u_1 es el primer término, r es la razón y n es el número de términos de la sucesión.

Este formato de la expresión se utiliza generalmente cuando $r > 1$ o $r < -1$.

Si multiplicamos $S_n \times \dfrac{-1}{-1}$ obtenemos otra variante de la fórmula:

$$S_n = \frac{u_1(1 - r^n)}{1 - r} \qquad r \neq 1$$

Esta variante se utiliza cuando $-1 < r < 1$, así evitamos trabajar con valores negativos.

Ejemplo resuelto

Tenemos la siguiente serie:

$4 + 12 + 36 + 108 + \ldots + 26\,244$

a Calcula cuántos términos tiene la serie.
b Calcula la suma de la serie.

a $u_1 = 4$, $r = 3$

Usando la fórmula $u_n = u_1 r^{n-1}$

$4 \times 3^{n-1} = 26\,244$

$3^{n-1} = 6\,561$

Con la calculadora hallamos que $3^8 = 6\,561$.

Como $3^8 = 3^{n-1}$, entonces $8 = n - 1$; es decir, $n = 9$.

Hay nueve términos en la serie.

b $S_n = \dfrac{u_1(r^n - 1)}{r - 1}$ $\qquad u_1 = 4$, $r = 3$ y $n = 9$

$S_9 = \dfrac{4(3^9 - 1)}{3 - 1} = 39\,364$

Puedes comprobar la solución con la CG como se ha mostrado anteriormente.

Ejercicio 1.8.2

1 De cada una de las siguientes series geométricas, calcula:

i) La razón, r.
ii) La suma de los 10 primeros términos.

a $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 + 2$ **b** $-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 + 3 - 9$

c $5 + 7{,}5 + 11{,}25 + 16{,}875$ **d** $10 + 1 + 0{,}1 + 0{,}01 + 0{,}001$

2 En las siguientes series se dan los tres primeros y los últimos términos.

i) Halla el número de términos, n, de cada una.
ii) Calcula la suma de las series.

a $1 + 3 + 9 + \ldots + 2\,187$ **b** $\frac{1}{5} + \frac{2}{5} + \frac{4}{5} + \ldots + 12\frac{4}{5}$

c $8 - 4 + 2 - \ldots + \frac{1}{32}$ **d** $a + ar + ar^2 + \ldots + ar^{n-1}$

3 Calcula las siguientes sumas.

a $\sum_{1}^{5} 4^n$ **b** $\sum_{1}^{7} 2(3)^{n-2}$ **c** $\sum_{4}^{8} \frac{2^{n-1}}{4}$

4 En una serie geométrica $u_2 = \frac{1}{3}$ y $u_5 = 72$, calcula:

a La razón, r.
b El primer término, u_1.
c El valor de S_6.

5 Tres términos consecutivos de una serie geométrica son $(p - 2)$, $(-p + 1)$ y $(2p - 2)$.

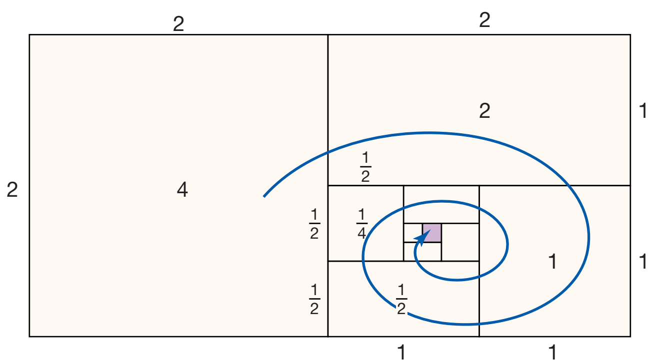
a Calcula los posibles valores que puede tomar p.
b Calcula el término anterior a $(p - 2)$ si p es el mayor de los valores obtenidos en el apartado **a**.
c Si $u_3 = (p - 2)$, calcula S_8.

Series geométricas infinitas

Si con las series con las que hemos trabajado hasta ahora siguiésemos sumando sus términos infinitamente, la suma divergiría (tendería a infinito). Sin embargo, no siempre ocurre esto, hay algunas series cuya suma converge a un valor, por ejemplo:

$$4 \underset{\times\frac{1}{2}}{\curvearrowright} + \; 2 \underset{\times\frac{1}{2}}{\curvearrowright} + \; 1 \underset{\times\frac{1}{2}}{\curvearrowright} + \; \frac{1}{2} \underset{\times\frac{1}{2}}{\curvearrowright} + \; \frac{1}{4}$$

La cantidad que se suma cada vez es menor. Esto se representa visualmente en la figura siguiente.



El área de cada cuadrado o rectángulo representa u_n término de la serie. El área total del rectángulo mayor es 8. Así se ve que la suma de la serie, si se siguiese indefinidamente, sería también 8, es decir: $S_\infty = 8$.

La demostración algebraica se realiza partiendo de su expresión general $S_n = \dfrac{u_1(1-r^n)}{1-r}$.

(Nota: Se utiliza esta variante de la fórmula porque $-1 < r < 1$).

$u_1 = 4$, $r = \frac{1}{2}$

$$S_\infty = \frac{4\left(1-\frac{1}{2}^n\right)}{1-\frac{1}{2}} = \frac{4\left(1-\frac{1}{2}^n\right)}{\frac{1}{2}} = 8\left(1-\frac{1}{2}^n\right)$$

Como que $n \to \infty$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. Así, $S_\infty = 8(1-0) = 8$.

En general $S_n = \dfrac{u_1(1-r^n)}{1-r}$ se convierte en $S_\infty = \dfrac{u_1}{1-r}$ para una serie geométrica infinita donde $(1-r^n) \to 1$ donde $n \to \infty$.

Por lo tanto, si $-1 < r < 1$, la suma infinita de una serie es igual a un número.

Ejemplo resuelto

Tenemos una sucesión cuyo término general es $u_n = 3(\frac{1}{2})^{n-1}$.

a Calcula u_1, u_2 y u_3.
b Halla los valores de u_1 y r
c Calcula la suma de la serie infinita $\sum_{1}^{\infty} 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

a $u_1 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 3$

$u_2 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{3}{2}$

$u_3 = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$

b $u_1 = 3$, $r = \frac{1}{2}$

c $S_\infty = \dfrac{u_1}{1 - r} = \dfrac{3}{1 - \frac{1}{2}} = 6$

Ejercicio 1.8.3

1 Calcula la suma infinita de las siguientes series.

a $18 + 6 + 2 + \frac{2}{3} + \ldots$

b $-8 + 4 - 2 + 1 - \ldots$

c $1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1\,000} + \ldots$

d $7 + 2 + \frac{4}{7} + \frac{8}{49} + \ldots$

2 Realiza las siguientes sumas infinitas.

a $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

b $\sum_{1}^{\infty}\frac{2}{2^{n-1}}$

c $\sum_{5}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

d $\sum_{10}^{\infty}\frac{5}{3^{n-1}}$

3 El segundo término de una serie geométrica es $\frac{3}{2}$. La suma infinita de la misma serie es 6. Calcula:

a u_1

b La razón, r.

4 En una serie geométrica $u_1 + u_2 = 12$. Si $r = \frac{1}{3}$, ¿cuál es la suma de los infinitos términos?

1.9 Interés simple e interés compuesto

El **interés** es el dinero que un banco o una sociedad prestamista dan a un cliente por ingresar una cantidad, o el dinero que le cobran por haberle prestado una cantidad. El dinero depositado o prestado se llama capital. El **tipo de interés** es la tasa que se le aplica, y el dinero suele ingresarse o prestarse durante un cierto periodo de tiempo.

Interés simple

Para calcular el **interés simple** se utiliza la siguiente fórmula:

$$I = \frac{Crn}{100}$$

donde I = el interés simple
C = el capital (la cantidad de dinero ingresada o prestada)
n = cantidad de periodos de tiempo (generalmente son años)
r = tipo de interés aplicado

Ejemplos resueltos

1 Si se depositan 250 € durante 6 años al 8% anual, ¿qué interés simple se obtiene?

$$I = \frac{Crn}{100}$$

$$I = \frac{250 \times 8 \times 6}{100}$$

$$I = 120$$

El interés que se obtiene es de 120 €.

2 Si se han ingresado 250 € al 8% anual, ¿en cuánto tiempo se obtendrá un interés de 80 €?

$$I = \frac{Crn}{100}$$

$$80 = \frac{250 \times 8 \times n}{100}$$

$$8000 = 2000n$$

$$n = 4$$

Con 250 €, se tardaría 4 años en ganar 80 €.

3 ¿Qué tipo de interés habrá que aplicarle a un capital de 750 $ para que pueda ganar 180 $ en 4 años?

$$I = \frac{Crn}{100}$$

$$180 = \frac{750 \times r \times 4}{100}$$

$$180 = 30r$$

$$r = 6\%$$

Se le debe aplicar un 6% a 750 $ para ganar 180 $ en 4 años.

La fórmula del capital final, A, es capital inicial más interés:

$$A = C + \frac{Crn}{100}.$$

También puede escribirse como $A = C + n \times \frac{Cr}{100}$.

Compara esta fórmula con la del término general de una progresión aritmética de la sección 1.7:

$$u_n = u_1 + (n - 1)d$$

Si se calcula año tras año el capital final (A) generado por un interés simple, se obtiene una progresión aritmética cuyo primer término es $u_1 = C$ y su diferencia $d = \frac{Cr}{100}$.

Ejercicio 1.9.1

Todos los tipos de interés son anuales.

1 Halla el interés simple que se paga en cada uno de los siguientes casos:

	Capital	Tipo	Periodo
a	300 NZ$	6%	4 años
b	750 £	8%	7 años
c	425 ¥	6%	4 años
d	2800 baht	4,5%	2 años
e	880 HK$	6%	7 años

2 En cada uno de estos casos, ¿cuánto tiempo se necesita para ganar la cantidad indicada?

	C	*r*	I
a	500 baht	6%	150 baht
b	5800 ¥	4%	950 ¥
c	4000 AU$	7,5%	1500 AU$
d	2800 £	8,5%	1904 £
e	900 €	4,5%	243 €
f	400 Ft	9%	252 Ft

3 Calcula el porcentaje de interés anual aplicado en cada caso si se le aplicó durante el tiempo indicado y dio los beneficios que se muestran.

	Capital	Tiempo	Interés
a	400 €	4 años	1120 €
b	800 US$	7 años	224 US$
c	2000 baht	3 años	210 baht
d	1500 £	6 años	675 £
e	850 €	5 años	340 €
f	1250 AU$	2 años	275 AU$

4 En cada uno de estos casos, calcula el capital necesario para ganar el interés dado durante los años y el tipo de interés indicados.

	Interés	Tiempo	Tipo
a	80 Ft	4 años	5%
b	36 NZ$	3 años	6%
c	340 €	5 años	8%
d	540 baht	6 años	7,5%
e	540 €	3 años	4,5%
f	348 US$	4 años	7,25%

5 ¿Qué tipo de interés se ha aplicado a una cuenta en la que se ingresaron 2000 £ si ha recibido 400 £ por los intereses en 5 años?

6 ¿Cuánto tiempo tardará un capital de 350 € al 8% en generar unos intereses de 56 €?

7 Un capital de 480 Ft genera unos intereses de 108 Ft en 5 años. ¿Qué tipo de interés se le ha aplicado?

8 Un capital de 750 € crece hasta 1320 € en 8 años. ¿A qué tipo de interés estaba?

9 Si se invierten 1500 AU$ durante 6 años al 3,5% anual, ¿cuánto se ganará con los intereses?

10 Se invierten 500 baht durante 11 años, de forma que el capital final es de 830 baht. ¿Qué tipo de interés se ha aplicado?

WEB POWERPOINTS WEB PERSONAL TUTOR

Interés compuesto

En esta sección pasamos del interés simple al interés compuesto. Ambos intereses se hallan de la misma forma en el primer periodo de tiempo: se paga un porcentaje del capital. En los siguientes periodos, el interés simple se calcula siempre sobre el capital inicial, mientras que el interés compuesto se aplica sobre el capital final de cada periodo, que incluye el interés pagado en el periodo anterior. En la vida real, el interés simple tiene muy pocas aplicaciones, pues cuando en el día a día se habla de interés siempre se hace referencia al interés compuesto. Si tienes una cuenta de ahorros, el interés que te están dando es un interés compuesto y, cuando la gente pide un préstamo, está pagando el interés compuesto sobre el dinero que le han prestado.

Por ejemplo, un constructor va a edificar seis casas en un solar en España. Pide un préstamo de 500 000 euros al 10% anual que terminará de pagar en 3 años, que es cuando espera tener las casas terminadas y vendidas.

Al final del primer año su deuda será de:

500 000 € + 10% de 500 000; es decir, 500 000 × 1,10 = 550 000 €

Al final del segundo año su deuda será de:

550 000 € + 10% de 550 000; es decir, 550 000 × 1,10 = 605 000 €

Al final del tercer año su deuda será de:

605 000 € + 10% de 605 000; es decir, 605 000 × 1,10 = 665 500 €

Así, el interés que pagará será de:

665 500 € – 500 000 € = 165 500 €

El interés simple es de 50 000 € al año, por lo tanto el total es 150 000 €.

La diferencia de 15 500 € entre uno y otro es el interés compuesto.

La forma en la que una deuda crece, si se le aplica un interés compuesto, se calcula como se explica en el siguiente ejemplo.

¿En cuánto tiempo se duplicará una deuda que tiene un tipo de interés compuesto del 27% anual?

Ejemplo resuelto

Para calcular una tasa de interés del 27% se multiplica por 1,27.

Tiempo (años)	0	1	2	3
Deuda	C	$1{,}27C$	$1{,}27^2C = 1{,}61C$	$1{,}27^3C = 2{,}05C$

× 1,27 × 1,27 × 1,27

La deuda será más del doble al cabo de 3 años.

Continuamos con el ejemplo del constructor: si C es el capital que le han prestado, calculamos la deuda que tendrá al cabo de un año con la siguiente fórmula:

$D = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)$, donde r es el tipo de interés.

Esto es una progresión geométrica.

Después de 2 años: $D = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Después de 3 años: $D = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)\left(1 + \frac{r}{100}\right)$

Después de n años: $D = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$

La fórmula de la deuda incluye el capital inicial prestado. Así, para calcular el interés compuesto generado, se le resta C.

$$I = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n - C$$

El interés compuesto es un ejemplo de progresión geométrica. Analizaremos más a fondo las progresiones geométricas en la sección 1.8.

El término general de una progresión geométrica es:

$$u_n = u_1 r^{n-1}$$

Compara esta fórmula con la del interés compuesto obtenido con un tipo del r%.

$$A = C\left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

Nota: Hay algunas diferencias entre ambas fórmulas. u_n es análogo al interés final, A, pero n se usa de una forma diferente en las dos fórmulas. El capital inicial, C, se obtiene cuando $n = 0$; sin embargo, el primer término de una progresión geométrica, u_1, se obtiene cuando $n = 1$.

r es la razón en la fórmula del término general de la progresión geométrica, mientras que la razón en la sucesión que genera el interés compuesto es $\left(1 + \frac{r}{100}\right)$, donde r es el tipo de interés.

Normalmente, el interés se calcula anualmente, pero también se pueden utilizar otros periodos. El interés compuesto se puede cobrar o abonar anualmente, cada medio año, trimestralmente, mensualmente o a diario (teóricamente se puede elegir cualquier intervalo de tiempo).

Ejemplos resueltos

1 Alex ingresa 1 500 € en su cuenta de ahorro, que le ofrece un tipo de interés del 6% anual durante 10 años. Si Alex mantiene el dinero en la cuenta, ¿qué intereses ganará durante esos 10 años?

$$I = 1\,500\left(1 + \frac{6}{100}\right)^{10} - 1\,500$$

$$I = 2\,686{,}27 - 1\,500 = 1\,186{,}27$$

Los intereses obtenidos serán de 1 186,27 €.

2 Adrienne ingresa 2000 £ en su cuenta de ahorro, en la que le dan un interés compuesto del 8% anual. Calcula cuántos años debería dejar el dinero en la cuenta para que se duplicase su valor.

Un tipo de interés del 8% es una razón de 1,08.

Para resolver este problema se puede formar la progresión geométrica $u_{n+1} = u_n \times 1{,}08$ utilizando la regla de recurrencia en la calculadora, como se ha mostrado anteriormente (en página 48). Llámale u_0 a la cantidad inicial.

$u_1 = 2000 \times 1{,}08 = 2160$
$u_2 = 2160 \times 1{,}08 = 2332{,}80$
$u_3 = 2332{,}80 \times 1{,}08 = 2519{,}42$
…
$u_9 = 3998{,}01$
$u_{10} = 4317{,}85$

Para que se duplique el valor del dinero ingresado, Adrienne debe dejar su dinero en la cuenta durante 10 años.

3 Utiliza la CG para hallar el interés compuesto que se debe de pagar por un préstamo de 600 $ durante 3 años al que se le aplica una tasa anual equivalente (TAE) del 5%.

El pago total será de 694,58 $, por lo que el interés será 694,58 $ – 600 $ = 94,58 $.

4 Utiliza la CG para calcular el interés compuesto obtenido al invertir 3000 $ durante 18 meses al 8,5% TAE. El interés se calcula cada 6 meses.

Nota: El interés de cada periodo de 6 meses es $\frac{8{,}5}{2}$%. Por lo tanto, serán tres periodos de 6 meses.

$3000 \times 1{,}0425^3 = 3398{,}99$ $

La cantidad total es de 3399 $, así que el interés será 3399 $ – 3000 $ = 399 $.

Ejercicio 1.9.2

1 Una compañía naviera pide un préstamo de 70 millones de dólares a un interés del 5% anual para construir un nuevo crucero. Si devuelve el crédito después de 3 años, ¿cuáles son los intereses que ha pagado?

2 Una señora solicita un préstamo de 100000 € para hacer unas reformas en su casa. El tipo de interés que paga es del 5% anual. Si lo devuelve al cabo de 3 años, ¿cuántos intereses ha pagado?

3 Un señor tiene un descubierto de 5000 $ en su tarjeta de crédito. Si la tarjeta cobra un 20% TAE por los descubiertos y el señor no paga su deuda, ¿a cuánto ascenderá esta después de 4 años?

4 En un colegio, el número de alumnos aumenta un 10% cada año. Si había 1000 alumnos en un principio, ¿cuántos habrá al principio del cuarto año?

5 En el año 2005 se capturaron 8 millones de toneladas de pescado en el Mar del Norte. Si las capturas se reducen un 20% cada año, ¿cuánto se capturará al final del cuarto año?

6 ¿En cuántos años se duplicará una deuda si está a un tipo de interés compuesto del 42% anual?

7 ¿En cuántos años se duplicará una deuda si está a un tipo de interés compuesto del 15% anual?

8 El valor de un coche disminuye un 15% cada año. ¿En cuánto tiempo valdrá la mitad? Expresa la solución en años y meses.

9 Se invierte una cantidad de 3600 $ durante 18 meses al 9,5% TAE. Di cuál es el interés obtenido si se calcula:

a anualmente
b cada medio año
c mensualmente

10 Se invierten 960 € durante dos años al 7,5% TAE. Di cuál es el interés obtenido si se calcula:

a anualmente
b cada 6 meses
c mensualmente

Autoevaluación 1

Las figuras no están dibujadas a escala.

1 Determina cuáles de los siguientes números son racionales o irracionales.

a 1,6 **b** $\sqrt{3}$
c $0,\overset{\frown}{7}$ **d** $0,\overset{\frown}{73}$
e $\sqrt{121}$ **f** π

2 Redondea los siguientes números con la precisión que se indica entre paréntesis.

a 6472 (a la decena)
b 88465 (a la centena)
c 64785 (al millar)
d 6,7 (a la decena)

3 Redondea los siguientes números con las cifras decimales (c.d.) que se te indican entre paréntesis.

a 3,84 (1 c.d.) **b** 6,792 (1 c.d.)
c 0,8526 (2 c.d.) **d** 1,5849 (2 c.d.)
e 9,954 (1 c.d.) **f** 0,0077 (3 c.d.)

4 Redondea los siguientes números con las cifras significativas (c.s.) que se te indican entre paréntesis.

a 42,6 (1 c.s.) **b** 5,432 (2 c.s.)
c 0,0574 (1 c.s.) **d** 48572 (2 c.s.)
e 687453 (1 c.s.) **f** 687453 (3 c.s.)

5 Las dimensiones de un ortoedro son 12,32 cm × 1,8 cm × 4,16 cm. Calcula su volumen y expresa el resultado con tres cifras significativas.

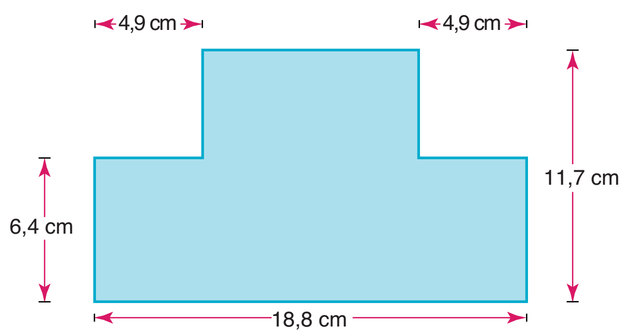
6 Si 1 milla son 1760 yardas, haz una estimación de las yardas que hay en 11,5 millas.

7 Haz una estimación de los resultados de las siguientes operaciones. No calcules el número exacto.

a $\dfrac{5,3 \times 11,2}{2,1}$ **b** $\dfrac{(9,8)^2}{(4,7)^2}$

c $\dfrac{18,8 \times (7,1)^2}{(3,1)^2 \times (4,9)^2}$

8 Haz una estimación de cuánto será el área de la siguiente figura.



9 a Utiliza la calculadora para hallar la respuesta exacta el ejercicio 8.

b Calcula el porcentaje de error que has cometido.

10 Un niño estima que su bicicleta pesa unos 2,5 kg. Si su peso real es de 2,46 kg, ¿qué porcentaje de error ha cometido?

Autoevaluación 2

1 Escribe en formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 6 millones
b 0,0045
c 3800000000
d 0,000000361
e 460 millones
f 3

2 Ordena los siguientes números en orden creciente de magnitud.

$6{,}2 \times 10^7$ $5{,}5 \times 10^{-3}$ $4{,}21 \times 10^7$
$4{,}9 \times 10^8$ $3{,}6 \times 10^{-5}$ $7{,}41 \times 10^{-9}$

3 Escribe los siguientes números:

6 millones 820000 0,0044 0,8
52000

a En formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.
b Ordénalos en orden decreciente de magnitud.

4 Deduce el valor de k en las siguientes igualdades.

a $4750 = 4{,}75 \times 10^k$
b $6440000000 = 6{,}44 \times 10^k$
c $0{,}0040 = 4{,}0 \times 10^k$
d $1000^2 = 1 \times 10^k$
e $0{,}9^3 = 7{,}29 \times 10^k$
f $800^3 = 5{,}12 \times 10^k$

5 Expresa el resultado de los siguientes cálculos con formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

a 4000×30000
b $(2{,}8 \times 10^5) \times (2{,}0 \times 10^3)$
c $(3{,}2 \times 10^9) \div (1{,}6 \times 10^4)$
d $(2{,}4 \times 10^8) \div (9{,}6 \times 10^2)$

6 La velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s. Júpiter está a 778 millones de kilómetros del Sol. Calcula los minutos que tarda la luz del Sol en llegar a Júpiter.

7 Una estrella está a 500 años luz de la Tierra. Si la velocidad de la luz es de 3×10^8 m/s, calcula la distancia de la estrella a la Tierra. Expresa la solución en formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

8 Pasa 162000 km a milímetros. Da la solución en formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$.

9 Pasa 7415000 mg a kilogramos. Aproxima la solución al kilogramo más cercano.

Autoevaluación 3

1 Para cada una de las siguientes sucesiones:

i) Halla su término general.
ii) Calcula el décimo término.

a 1, 5, 9, 13, …
b 1, –2, –5 , –8, …

2 Calcula u_5 y u_{100} para las siguientes sucesiones.

a $u_n = 6n - 3$
b $u_n = -\frac{1}{2}n + 4$

3 Copia y completa las siguientes tablas de progresiones aritméticas.

a

Posición	1	2	3	10		n
Término	17	14			–55	

b

Posición	2	6	10		n
Término	–4	–2		35	

4 Una chica deposita 300 $ en una cuenta que ofrece un interés simple del 7% anual. Si la chica mantiene el dinero en la cuenta, ¿cuánto tendrá ahorrado al cabo de 5 años?

5 En la progresión geométrica ___, ___, 27, ___, ___, –1

donde $u_3 = 27$ y $u_6 = -1$.
Calcula:
a La razón, r.
b El término u_1.
c Cuánto vale n si $u_n = -\frac{1}{81}$.

6 Calcula el resultado de estas series.

a $\sum_{1}^{10}(4n - 15)$

b $\sum_{5}^{18}-5n + 100$

7 Los términos tercero y décimo de una serie aritmética son –6 y 15 respectivamente.

Calcula:

a La diferencia, d.

b El primer término.

c El valor de $S_{20.}$

8 Los términos tercero, cuarto y quinto de una serie aritmética son $(2m + 2)$, $(3m + 1)$ y $(5m - 5)$.

Calcula:

d La diferencia, d.

e El primer término.

f $S_{10.}$

9 Se dan los tres primeros términos y el último de las siguientes series geométricas.

i) Halla cuántos términos tienen, n.

ii) Calcula la suma de las series.

a $10 + 20 + 40 + \ldots + 10240$

b $128 - 64 + 32 + \ldots + \frac{1}{32}$

10 Calcula las siguientes sumas.

a $\sum_{1}^{5}3^n$ **b** $\sum_{3}^{9}\frac{3^{n-2}}{5}$

11 Utiliza la CG o algún programa gráfico para hallar las coordenadas de los puntos de intersección de los siguientes pares de ecuaciones lineales.

a $y = -x + 3$ e $y = 2x - 3$

b $x + 5 = y$ y $2x + 3y - 5 = 0$

12 Usa la CG o algún programa gráfico para:

i) Representar las siguientes ecuaciones de segundo grado.

ii) Hallar las raíces del polinomio de segundo grado.

a $y = x^2 - 6x + 9$

b $y = -2x^2 + 20x - 48$

Autoevaluación 4

1 Vincent Van Gogh pintó la serie de bodegones llamados *Los girasoles*. En 1887, su hermano compró uno de ellos, *Jarrón con 15 girasoles*, por lo equivalente a 10 \$. En 1987, el magnate japonés Yasuo Goto compró el cuadro por el equivalente a 40 millones de dólares. ¿Qué tasa de crecimiento obtuvo el valor del cuadro con la última compra?

2 El cambio de 1 € son 1,35 \$ y el de 1 £ son 1,32 €. ¿Cuántas libras son 1 millón de dólares?

3 ¿En qué tanto por ciento se diferencian un interés simple del 10% durante 10 años y un interés compuesto del 10% durante 10 años?

4 La población de cierta ciudad aumenta un 5% cada año. Si había 86 000 habitantes en 1997, ¿en qué año la población excederá la cantidad de 100 000 habitantes por primera vez?

5 Se pide un préstamo de 3 millones de dólares durante dos años a un tipo del 8%. Halla cuánto se pagaría de intereses si:

a Fuese un interés simple.

b Fuese un interés compuesto.

6 El valor de una casa se incrementa un 20% cada año. ¿Cuándo habrá duplicado su precio?

7 La población de un tipo de insectos aumenta aproximadamente el 10% cada día. ¿Cuántos días tienen que pasar para que la población se duplique?

8 Un hombre pide un préstamo de 5 millones de dólares durante 3 años a un tipo del 6%. Halla cuánto pagaría de intereses si:

a Fuese un interés simple.

b Fuese un interés compuesto.

c Fuese un interés compuesto calculado trimestralmente.

9 Un barco pierde el 15% de su valor cada año. ¿En cuánto tiempo su valor se habrá reducido a la mitad?

Autoevaluación 5

1 En 1949 Jackson Pollock vendió uno de sus cuadros abstractos llamado *1948 número 5* por 100 000 \$. En 2006, David Martínez compró el cuadro en una subasta por 140 millones de dólares. ¿Con qué tasa compuesta de crecimiento anual aumentó el cuadro su valor?

2 Si 1 € se cambia por 1,35 \$ y 1 £ por 1,32 €, ¿cuántos dólares recibirías por 1 millón de libras?

3 ¿Cuál es el porcentaje de diferencia entre el 12,5% de interés simple durante 20 años y el 12,5% de interés compuesto durante 20 años?

4 La población de una ciudad aumenta un 15% al año. Si en 1997 había 800 000 habitantes, ¿en qué año se espera que se superen los 3 000 000 de habitantes?

5 Se concede un préstamo de 5 millones de euros durante 12 años a un tipo del 5%. Halla cuánto sería el interés pagado si:

a Fuese un interés simple.

b Fuese un interés compuesto.

6 El valor de una casa aumenta el 12,5% cada año. ¿Cuánto tiempo tardará en doblar su precio?

7 La población de un tipo de insectos aumenta aproximadamente el 7% cada día. ¿Cuántos días han de pasar para que se duplique la población?

8 Un hombre pide un préstamo de cuatro millones de dólares durante tres años a un tipo del 8,5%. Halla cuánto tendría que pagar si:

a Fuese un interés simple.

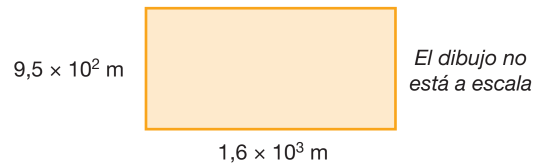
b Fuese un interés compuesto.

c Fuese un interés compuesto calculado trimestralmente.

9 El valor de un coche se reduce en un 12% cada año. ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para que su precio solo sea un 25% del original?

Preguntas de examen

1 Los lados de este rectángulo miden $9{,}5 \times 10^2$ m y $1{,}6 \times 10^3$ m.



a Halla el área del rectángulo y exprésala con formato $a \times 10^k$, donde $1 \leq a < 10$ y $k \in \mathbb{Z}$. [3]

Helen piensa que el área del rectángulo mide unos 1 600 000 m^2.

b Halla qué porcentaje de error ha cometido Helen con su estimación. [3]

Prueba 1, noviembre 2009, P3

2 El señor Tan invirtió 5 000 francos suizos (CHF) en un banco, *A*, a un tipo de interés simple del *r*%, durante cuatro años. El interés total recibido fue de 568 CHF.

a Calcula el valor de *r*. [3]

El señor Black invirtió 5 000 CHF en un banco, *B*, con un tipo de interés **compuesto** anual nominal del 3,6% calculado **trimestralmente** durante cuatro años.

b Calcula el interés recibido al final de los cuatro años. Expresa la respuesta con **dos cifras decimales**. [3]

Prueba 1, noviembre 2009, P15

3 El sétimo término, u_7, de una progresión geométrica es 108. El octavo término, u_8, de la progresión es 36.

a Halla la razón, *r*, de la progresión. [1]

b Halla u_1. [2]

La suma de los *k* primeros términos de la progresión es 118 096.

c Halla el valor de *k*. [3]

Prueba 1, mayo 2011, P11

4 **Parte A**

Daniel quiere invertir 25 000 $ durante 3 años y tiene las siguientes opciones:

Opción uno: ofrece un interés simple anual al 6%.

Opción dos: ofrece un tipo de interés nominal anual compuesto del 5% calculado **anualmente**.

Opción tres: ofrece un tipo de interés nominal anual compuesto del 4,5% calculado **mensualmente**.

a Calcula cuánto le reportaría su inversión en cada una de las opciones **dando las cantidades con dos cifras decimales**. [8]

b Decide cuál de las opciones es más ventajosa para Daniel. [1]

Parte B

Se define la siguiente progresión aritmética:

$$U_n = 135 + 7n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a Calcula u_1, el primer término de la progresión. [2]

b Demuestra que la diferencia es 7. [2]

S_n es la suma de los n primeros términos de la progresión.

c Encuentra la expresión de S_n. Expresa la solución como $S_n = An^2 + Bn$, donde A y B son constantes. [3]

El primer término, v_1, de una progresión geométrica es 20 y el cuarto término, v_4, es 67,5.

d Demuestra que la razón, r, de la progresión geométrica es 1,5. [2]

T_n es la suma de los n primeros números de la progresión geométrica.

e Calcula T_7, la suma de los siete primeros términos de la progresión geométrica. [2]

f Utiliza tu calculadora gráfica para encontrar el menor valor de n para el que se cumple que $T_n > S_n$. [2]

Prueba 2, mayo 2010, P5

Unidad 1

Aplicaciones, ideas de proyectos y teoría del conocimiento

1 *¿Por qué razón se han elegido las letras $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ para representar los conjuntos numéricos?*

2 *La sucesión 1, 2, 3, 4, 5, ... se puede emparejar con la sucesión de los cuadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25, ... Debate si hay más términos en la primera sucesión que en la segunda.*

3 *Explica cuál es la diferencia entre:*

a) *Una demostración legal y una demostración matemática.*

b) *Los conceptos de «real» e «imaginario» en la vida real comparados con los de las soluciones matemáticas.*

4 *¿La notación del SI ayuda a que las matemáticas sean «un lenguaje universal»? Investiga diferentes sistemas de medida anteriores al SI.*

5 *¿Qué es la «proporción áurea»? ¿Por qué se considera «bella»? La sucesión de Fibonacci podría ser el tema para un proyecto. Pero prepárate: se han invertido vidas enteras en su estudio.*

6 *¿Se puede conseguir una respuesta numérica exacta de un problema? ¿El error que introduce una aproximación implica que la respuesta sea incorrecta?*

7 *Algunas sucesiones no son ni aritméticas ni geométricas. Investiga otros tipos de sucesiones.*

8 *Investiga la forma en la que se mueve el caballo en el tablero de ajedrez. Esto podría ser la base de un proyecto.*

9 *El número $n^2 - n + 41$ siempre es un número primo. Indaga sobre esta afirmación e intenta probarla o refutarla. Encuentra otras expresiones polinómicas de segundo grado similares como base para un proyecto.*

10 ¿Existe el cero o es exclusivamente una «idea» de los matemáticos?

11 *«El primer programa espacial, en los años sesenta, costó miles de millones de dólares y eso fue cuando mil millones de dólares era mucho dinero». ¿Qué quiere decir esta frase? ¿Miles de millones y billones tiene algún significado real en la vida «cotidiana»?*

12 *Las aproximaciones se utilizan de diferentes formas científicamente: en la Física, la Meteorología y la Biología, por ejemplo. Las escalas numéricas y las aproximaciones podrían ser las bases de un proyecto.*

13 Newton, Gauss y Einstein eran genios. ¿Podría medirse su habilidad? Los creadores de Facebook y Google, ¿son genios? Si lo fueran, ¿podría medirse su habilidad?

14 Con las divisas se comercia como con las acciones de las empresas. Como este tipo de comercio puede provocar un desempleo masivo, ¿crees que debería prohibirse?